COLUMBIA LIBRARIES OFFSITE
HEALTH SCIENCES STANDARD
HX64102432
QP321 .B73 1892 Bestimmung der tragh
RECAP

W. BRAUNE,
MITGLIED DER K. NIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
UND
O. FISCHER.

BESTIMMUNG DER TRÄGHEITSMOMENTE DES MENSCHLICHEN KÖRPERS UND SEINER GLIEDER.

Des XVIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VIII

MIT FÜNF TAFELN UND SIEBEN FIGUREN.

COLUMBIA UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSIOLOGY
COLLEGE OF PHYSICIANS AND SURGEONS
437 WEST 59TH STREET
NEW YORK

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1892.

Einzelpreis: 4 Mark.

Columbia University
in the City of New York
College of Physicians and Surgeons
Library

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
Open Knowledge Commons (for the Medical Heritage Library project)

http://www.archive.org/details/bestimmungdertr00brau

BESTIMMUNG DER TRÄGHEITSMOMENTE

DES

MENSCHLICHEN KÖRPERS

UND

SEINER GLIEDER

VON

W. BRAUNE,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

UND

O. FISCHER.

Des XVIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VIII.

MIT FÜNF TAFELN UND SIEBEN FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1892.

QP321
B73
1892

Das Manuscript eingeliefert am 4. Juli 1892.
Der Druck beendet am 30. August 1892.

BESTIMMUNG DER TRÄGHEITSMOMENTE

DES

MENSCHLICHEN KÖRPERS

UND

SEINER GLIEDER*)

VON

W. BRAUNE UND **O. FISCHER.**

MIT FÜNF TAFELN UND SIEBEN FIGUREN.

*) Das Manuscript zu dieser Arbeit ist wenige Tage vor dem Ableben des Herrn Geh. Medicinalraths Professor Dr. W. BRAUNE noch gemeinsam angefangen worden.

Einleitung.

Bei jeder Bewegung eines starren Körpers kommen hauptsächlich zweierlei Bewegungsarten in Betracht, Translation und Rotation. Man nennt eine Bewegung Translation, wenn alle Punkte des Körpers parallele Gerade beschreiben, man spricht dagegen von einer Rotation, wenn bei der Bewegung die Punkte einer Geraden des Körpers, welche den Namen Rotationsaxe führt, ihre Lage nicht ändern, alle anderen Punkte dagegen Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte auf der Rotationsaxe liegen und deren Ebenen senkrecht auf derselben stehen.

Es lässt sich jede Ortsveränderung eines starren Körpers zurückführen auf eine Translation irgend eines seiner Punkte und eine gleichzeitige Rotation um eine durch diesen Punkt hindurchgehende Gerade. Dieser Punkt des Körpers kann beliebig ausgewählt werden, aber für jeden anderen Punkt ist im Allgemeinen auch die Grösse der Translation, die Richtung der durch ihn hindurchgehenden Rotationsaxe und die Grösse der Rotation eine andere. Insbesondere kann man die Wahl des Punktes so treffen, dass die Richtung der Rotationsaxe mit der Richtung der Translation zusammenfällt; in diesem Falle nennt man die Combination beider Bewegungsarten eine Schraubenbewegung und die Rotationsaxe die Schraubenaxe. Andererseits kann man aber auch z. B. den Schwerpunkt des Körpers ins Auge fassen und die Ortsveränderung durch eine Translation des Schwerpunktes verbunden mit einer Rotation um eine durch ihn hindurchgehende Gerade ersetzen.

Bestimmt man nur die Translation und Rotation, welche einer endlichen Ortsveränderung des Körpers entspricht, so ist dadurch noch kein Einblick in den thatsächlichen Verlauf der Bewegung

zwischen beiden Grenzlagen gewonnen. Um diesen letzteren Zweck zu erreichen, muss man sich die Ortsveränderung in eine genügend grosse Anzahl sehr kleiner Lageänderungen des Körpers, genau genommen in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Verrückungen zerlegt denken.

Es kommt nun ganz auf den besonderen Zweck der Untersuchung an, welchen Punkt des Körpers man für die kleinen Verrückungen zu bevorzugen hat.

Will man sich, im Sinne der Kinematik, nur eine klare Vorstellung von dem Verlaufe der Bewegung verschaffen, ohne nach deren Ursachen zu fragen, so wird man mit Vortheil für jede einzelne Verrückung den Punkt so auswählen, dass die kleine Translation in der Richtung der Rotationsaxe stattfindet. Dann hat man dadurch die ganze Bewegung des Körpers in eine Folge sehr kleiner Schraubenbewegungen zerlegt. Die zu den aufeinanderfolgenden Schraubenbewegungen gehörenden Schraubenaxen (Momentanaxen) haben im Allgemeinen verschiedene Lage im Körper, sie laufen aber sehr nahe an einander vorüber und bilden in ihrer Gesammtheit eine sogenannte Regelfläche, d. h. eine Fläche, welche eine ganze Schaar gerader Linien enthält. Jede einzelne der aufeinander folgenden Schraubenaxen des sich bewegenden Körpers wird während der kleinen zu ihr gehörenden Schraubenbewegung momentan mit einer festen Geraden im Raume zusammenfallen. Alle diese festen Geraden im Raume bilden in ihrer Gesammtheit ebenfalls eine Regelfläche, welche durchaus nicht identisch mit der ersten ist. Die letztere bleibt während der Bewegung des Körpers im Raume fest, die erstere dagegen verändert ihre Lage im Raume, da sie mit dem bewegten Körper fest verbunden ist. In jedem Moment wird eine Gerade der beweglichen Regelfläche mit einer der festen zusammenfallen, nämlich die Gerade, welche als momentane Schraubenaxe dient. Man erhält auf diese Weise den bekannten Satz, dass während der Bewegung des Körpers die eine Regelfläche auf der anderen, im Raume festen, rollt und dabei gleichzeitig ein Stück längs der beiden zusammenfallenden Geraden gleitet. Bei Anwendung der beiden Regelflächen erhält infolgedessen der geometrische Verlauf der ganzen Bewegung einen hohen Grad von Anschaulichkeit.

Untersucht man dagegen, auf welche Weise die Bewegung des Körpers durch an ihm angreifende Kräfte hervorgebracht wird, eine Aufgabe der Dynamik, so ist es von Vortheil, für jede Verrückung den Schwerpunkt des Körpers in Betracht zu ziehen und die Bewegung anzusehen als eine Folge von kleinen Translationen des Schwerpunktes, verbunden mit gleichzeitiger Rotation um eine durch denselben hindurchgehende Gerade. Im Allgemeinen ändert sich dabei fortwährend sowohl die Richtung der Translation als auch die Richtung der Rotationsaxe, und beide sind in jedem Moment im Allgemeinen von einander verschieden. Der Schwerpunkt wird dann beim Uebergange zu unendlich kleinen Verrückungen eine stete Raumcurve beschreiben, und die Rotationsaxen werden einen zum Körper festen Kegel erzeugen, dessen Spitze in den Schwerpunkt hineinfällt. Diese Art der Zerlegung der Bewegung eines starren Körpers hat eine wichtige mechanische Bedeutung. Aus den allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung folgt nämlich, dass bei der Bewegung eines starren Körpers unter dem Einflusse äusserer Kräfte die Bewegung des Schwerpunktes in der Weise vor sich geht, als wenn in demselben die Gesammtmasse des Körpers vereinigt und sämmtliche äusseren Kräfte, welche an den einzelnen Punkten des Körpers angreifen, parallel mit sich nach dem Schwerpunkte verlegt wären. Gehen im besonderen Falle von vornherein die Richtungen sämmtlicher Kräfte durch den Schwerpunkt hindurch, so wird die Bewegung des ganzen Körpers überhaupt nur in einer Bewegung des Schwerpunktes bestehen, ohne dass gleichzeitig Rotationen um irgend welche Axen durch den Schwerpunkt stattfinden. In diesem Falle werden sich alle Kräfte zu einer einzigen im Schwerpunkte angreifenden Resultante zusammensetzen, und die Aufgabe beschränkt sich darauf, die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einflusse einer an ihm angreifenden Kraft zu bestimmen. Verlaufen dagegen, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, die Richtungen der Kräfte in irgend welchem Abstande vom Schwerpunkte, so resultirt aus diesem Umstande ein Bestreben der Kräfte, den Körper um irgend eine Axe durch den Schwerpunkt herumzudrehen.

Bekanntlich ist nun ein jeder Körper träge, d. h. er hat das Bestreben, in seinem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu ver-

harren. Daher setzt er allen Kräften, welche seinen Bewegungszustand zu verändern streben, einen gewissen Widerstand entgegen. Dieser Widerstand ist ein anderer, wenn eine Kraft ihm eine Translation ertheilen, als wenn sie ihn in Rotation versetzen will.

Der Bewegungszustand eines Körpers drückt sich in einer gewissen Geschwindigkeit aus, welche der Körper das Bestreben hat, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach beizubehalten. Der Zustand der Ruhe ist von dem allgemeinen Bewegungszustande nur ein besonderer Fall, der dadurch charakterisirt ist, dass die Geschwindigkeit den Werth 0 besitzt. Abgesehen von der Richtungsänderung besteht daher eine Veränderung in der Grösse des Bewegungszustandes eines Körpers entweder in einer Zunahme oder einer Abnahme seiner Geschwindigkeit. Die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit, welche der Körper erfahren würde, wenn die Ursache der Zustandsänderung während einer ganzen Secunde gleichmässig auf den Körper einwirkte, nennt man Beschleunigung, und zwar positive Beschleunigung bei Zunahme und negative Beschleunigung (oder auch Verzögerung) bei Abnahme der Geschwindigkeit.

Bei der Translation eines Körpers redet man von Lineargeschwindigkeit und Linearbeschleunigung (oder auch Translationsgeschwindigkeit und Translationsbeschleunigung), bei der Rotation um eine Axe von Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung (oder auch Rotationsgeschwindigkeit und Rotationsbeschleunigung).

Wie man bei der Translation die Lineargeschwindigkeit und Linearbeschleunigung des ganzen Körpers durch Strecken misst, welche irgend einer seiner Punkte zurücklegt, so misst man die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung bei der Rotation durch Bögen, die irgend einer der Punkte des Körpers, welche von der Rotationsaxe die Entfernung 1 besitzen, auf seiner Kreisbahn zurücklegt.

Es ist nun eine fundamentale Aufgabe für die Dynamik, zu untersuchen einerseits, welche Aenderungen des Bewegungszustandes irgend welche an dem Körper angreifende Kräfte infolge ihrer Grösse, Richtung und Angriffsstelle hervorzubringen suchen,

und andererseits, welchen Widerstand der Körper selbst in Folge seiner Trägheit diesen Wirkungen der Kräfte entgegensetzt.

Beschränkt man sich auf die beiden Bewegungsarten, aus denen alle anderen zusammengesetzt sind, auf die Translation und Rotation, und berücksichtigt das Verhalten des Schwerpunktes eines Körpers gegenüber angreifenden Kräften, so zerfällt diese Aufgabe in vier Fragen, welche sich in zwei Gruppen zusammenfassen lassen, je nachdem sie sich auf die Translation oder auf die Rotation beziehen.

I. Translation: *a.* Welche Linearbeschleunigung eines starren Körpers sucht eine in seinem Schwerpunkte angreifende Kraft hervorzubringen?

b. Welchen Widerstand setzt der Körper in Folge seiner Trägheit diesem Beschleunigungsbestreben entgegen?

II. Rotation: *a.* Welche Winkelbeschleunigung eines um eine feste Axe drehbaren Körpers sucht eine irgendwo angreifende Kraft hervorzubringen?

b. Welchen Widerstand setzt der Körper in Folge seiner Trägheit diesem Beschleunigungsbestreben entgegen?[1])

Es ergeben sich nun folgende Gesetze:

I. Translation.

a. Je grösser die Kraft, um so grösser ist das Bestreben derselben, eine Linearbeschleunigung hervorzurufen, und zwar ist dasselbe einfach proportional der Grösse der Kraft. Man hat daher in der Grösse einer Kraft direct ein Maass für das Bestreben derselben, dem Körper eine Linearbeschleunigung zu ertheilen. Greifen mehrere Kräfte im Schwerpunkte an, so ist die Resultante derselben ein Maass für das resultirende Beschleunigungsbestreben.

b. Je grösser die Masse des Körpers, um so grösser ist der Widerstand, welchen derselbe der Wirkung der Kräfte entgegensetzt,

1) Es sollen hier nur diese vier einfachen Fälle betrachtet werden, um durch die anderenfalls nothwendige Berücksichtigung der Normalbeschleunigung und des Widerstandes des Körpers gegen Richtungsänderungen (Centrifugalkraft) diese einleitenden Bemerkungen nicht weiter ausdehnen zu müssen, als es ihr Zweck erfordert, nämlich der, den Begriff des Trägheitsmomentes und seine wichtige Bedeutung für die Dynamik in der nöthigen Weise zu beleuchten.

und zwar ist derselbe einfach proportional der Grösse der Masse. Man hat daher in der Grösse der Masse eines Körpers direct ein Maass für den Widerstand, welchen derselbe dem Bestreben der Kräfte, eine Linearbeschleunigung hervorzurufen, entgegensetzt.

Daraus folgt aber, dass die thatsächlich eintretende Linearbeschleunigung des Körpers direct proportional der Grösse der angreifenden Kraft und umgekehrt proportional der Grösse der Masse des Körpers sein muss. Bezeichnet man die Linearbeschleunigung mit b, die resultirende Kraft mit K und die Gesammtmasse des Körpers mit M, so besteht demnach bei geeigneter Wahl der Einheiten zwischen diesen drei Grössen die Relation:

$$b = \frac{K}{M}.$$

II. Rotation.

a. Bei der Rotation kommt im Allgemeinen nur ein Theil der Kraft zur Geltung. Um denselben zu erhalten, muss man die Kraft in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine die Richtung der Rotationsaxe selbst besitzt, während die andere senkrecht zu derselben gerichtet ist. Von beiden übt nur die letztere ein Bestreben aus, den Körper um die feste Rotationsaxe herumzudrehen. Die Grösse dieses Bestrebens hängt ab sowohl von der Grösse der wirksamen Kraftcomponente, als auch von der Entfernung ihres Angriffspunktes von der Rotationsaxe, d. h. ihrem Hebelarm, als endlich auch von dem Winkel, welchen ihre Richtung mit der Richtung des Hebelarms bildet. Es gelten nun die Sätze: Das Rotationsbestreben einer Kraft ist um so grösser, je grösser die Componente der Kraft, welche senkrecht zur Rotationsaxe gerichtet ist, je grösser der Hebelarm und je grösser der spitze Winkel, welchen die Richtung der wirksamen Kraftcomponente mit der Richtung des Hebelarms bildet, und zwar ist das Rotationsbestreben einfach proportional der Grösse der Kraftcomponente, der Länge des Hebelarms und dem Sinus des Winkels zwischen Hebelarm und Kraftcomponente. Bezeichnet man die Grösse der wirksamen Kraftcomponente mit K, die Länge des Hebelarms mit h und den Winkel zwischen Hebelarm und Kraftcomponente mit α, so ist also das Rotationsbestreben der Kraft

proportional mit der Grösse $Kh \sin \alpha$. Für diesen Ausdruck ist in der Mechanik der Name Rotationsmoment oder Drehungsmoment der Kraft eingeführt. Man hat daher in dem Rotationsmoment einer Kraft ein Maass für das Bestreben derselben, dem Körper eine Winkelbeschleunigung um eine bestimmte Rotationsaxe zu ertheilen.

Es lässt sich nun auf zwei verschiedene Arten eine Anschauung von der Grösse des Rotationsmomentes erlangen.

Einmal kann man fragen, wie gross die Kraft sein müsste, welche am Hebelarm 1 rechtwinklig angreifend dasselbe Rotationsbestreben hervorbringen würde, als die gegebene Kraft bei ihrer Richtung und ihrem Hebelarm. Die Grösse dieser Kraft ist im Allgemeinen von der Grösse der wirksamen Kraftcomponente verschieden; sie ist direct durch $Kh \sin \alpha$ ausgedrückt, denn das Rotationsmoment würde in diesem Falle

$$(Kh \sin \alpha) \cdot 1 \cdot \sin 90° = Kh \sin \alpha ,$$

also dasselbe wie das der gegebenen Kraft sein. Es ist gebräuchlich, diese Veranschaulichung des Rotationsmomentes direct als Definition desselben gelten zu lassen, obgleich es nicht correct ist, da Kraft und Rotationsmoment verschiedene Dimension besitzen.

Eine zweite, mehr geometrische Art der Veranschaulichung der Grösse des Rotationsmomentes ist die, den Hebelarm anzugeben, an welchem die wirksame Kraftcomponente selbst rechtwinklig angreifen müsste, um dasselbe Rotationsbestreben hervorzubringen, wie bei ihrer Neigung zum thatsächlichen Hebelarm. Diese Strecke nennt man den idealen Hebelarm der Kraft; die Grösse desselben ist durch $h \sin \alpha$ gegeben, denn die Kraft K, welche an dem Hebelarm $h \sin \alpha$ rechtwinklig angreift, besitzt das Rotationsmoment

$$K \cdot (h \sin \alpha) \cdot \sin 90° = Kh \sin \alpha ,$$

d. h. wieder dasselbe wie die Kraft bei ihrem realen Hebelarm und ihrer Richtung zu demselben. Bezeichnet man den idealen Hebelarm mit i, so ist die Grösse des Rotationsmomentes der Kraftcomponente K ausgedrückt durch Ki. Greifen mehrere Kräfte an dem Körper an, so setzen sich die einzelnen Rotationsmomente derselben zu einem resultirenden Rotationsbestreben zusammen.

b. Ebenso, wie das Rotationsbestreben einer Kraft nicht allein von der Grösse derselben, sondern auch von der Lage der Rotationsaxe im Körper abhängt, ist nun der Widerstand, welchen die Gesammtmasse des Körpers dem Bestreben der Kräfte, eine Winkelbeschleunigung hervorzubringen, entgegensetzt, abhängig sowohl von der Grösse der Gesammtmasse des Körpers, als auch von der Lage der Rotationsaxe im Körper. Von vornherein lässt sich wieder sagen, dass der Widerstand des Körpers um so grösser ist, je grösser seine Gesammtmasse ist, und zwar ist derselbe einfach proportional der Grösse der Masse. Um nun auch den Einfluss zu erkennen, welchen die Lage der Rotationsaxe auf den Widerstand ausübt, muss man sich die Masse in eine grosse Anzahl sehr kleiner Massentheilchen zerlegt denken. Dadurch wird aber der Widerstand in ebenso viele kleine Bestandtheile zerlegt. Die einzelnen Beiträge der Massentheilchen zum Gesammtwiderstand sind nun keineswegs gleich gross, selbst wenn man allen Theilchen gleich grosse Masse zuschreiben wollte. Es haben zwar alle Massentheilchen bei der Rotation gleiche Winkelgeschwindigkeit und erhalten daher auch durch drehende Kräfte gleiche Winkelbeschleunigung, die Lineargeschwindigkeiten und Linearbeschleunigungen aber, welche die einzelnen Massentheilchen in einem bestimmten Moment in der Richtung der Tangente ihrer Kreisbahnen besitzen, sind sehr verschieden. Je weiter ein Massentheilchen von der Rotationsaxe entfernt ist, einen um so grösseren Weg muss es während einer Umdrehung zurücklegen, d. h. eine um so grössere Lineargeschwindigkeit muss es in jedem Moment haben. Bei einer Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erfahren daher die von der Axe weiter entfernten Massentheilchen eine grössere Aenderung der Lineargeschwindigkeit als die näher an der Axe liegenden und üben daher auch einen grösseren Widerstand gegen die Drehung aus. Der Widerstand eines Massentheilchens ist nun nicht blos einfach proportional mit seiner Entfernung von der Rotationsaxe, sondern proportional dem Quadrate derselben.

Dies kann man sich auf folgende Weise veranschaulichen.

Betrachten wir zwei isolirte Massentheilchen von gleich grosser Masse m, von denen das eine die Entfernung 1, das andere die Entfernung r von der Rotationsaxe besitzt. Auf beide soll je eine Kraft von demselben Rotationsmoment d einwirken. Für das erste Massen-

theilchen können wir die Kraft am Hebelarm 1 rechtwinklig angreifend denken, ihre Grösse ist dann durch d selbst gegeben; für das zweite Massentheilchen soll die Kraft am Hebelarm r rechtwinklig angreifen, die Grösse derselben muss dann $\frac{d}{r}$ sein, damit sie dasselbe Rotationsmoment d ausübt. Da in beiden Fällen die Kraft an der Masse selbst angreift, so ist die Linearbeschleunigung für das erste Massentheilchen $\frac{d}{m}$, für das zweite $\frac{d}{rm}$, d. h. aber die Linearbeschleunigung des Massentheilchens in der Entfernung r ist nur der $r$te Theil der Linearbeschleunigung des Theilchens in der Entfernung 1. Wären beide Linearbeschleunigungen gleich gross, so würden dennoch die Winkelbeschleunigungen verschieden sein, und zwar würde das Massentheilchen in der Entfernung r eine $r$mal so kleine Winkelbeschleunigung besitzen als das andere, weil ja für denselben Winkel die durchlaufenen Bögen auf dem Kreis mit dem Radius r $r$mal so gross sind als auf dem Kreis mit dem Radius 1. Nun ist aber die Linearbeschleunigung des Theilchens in der Entfernung r an und für sich schon kleiner, nämlich $r$mal so klein als die des anderen Theilchens, daher ist die Winkelbeschleunigung desselben sogar rr oder r^2mal so klein als die des Massentheilchens in der Entfernung 1. Da die Rotationsmomente gleich sind, so kann diese Verminderung der Winkelbeschleunigung nur daher rühren, dass das Massentheilchen in der Entfernung r dem Rotationsbestreben der Kraft einen r^2mal so grossen Widerstand entgegensetzt. Es ist also dieser Widerstand in der That proportional dem Quadrate der Entfernung des Massentheilchens von der Rotationsaxe. Da derselbe ausserdem einfach proportional der Grösse der Masse m des Theilchens ist, so ist der Ausdruck mr^2 ein Maass für den Widerstand, welchen ein Massentheilchen in der Entfernung r von der Rotationsaxe dem Drehungsbestreben einer Kraft entgegensetzt. Um den Gesammtwiderstand T des ganzen Körpers für die betreffende Rotationsaxe zu erhalten, hat man nur diese Ausdrücke mr^2 für sämmtliche Massentheilchen des Körpers zu addiren, so dass also

$$T = \Sigma mr^2$$

oder bei Annahme eines continuirlichen Körpers

$$T = \int r^2\, dm \quad \text{oder} \quad \iiint r^2 \mu\, dx\, dy\, dz \quad \text{ist,}$$

wo μ die Dichtigkeit im Punkte x, y, z bedeutet. Für diese Grösse ist von Euler der Name Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Rotationsaxe in die Mechanik eingeführt worden. »Man hat also in dem Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine bestimmte Rotationsaxe ein Maass für den Widerstand, welchen der Körper den Bestrebungen von Kräften entgegensetzt, ihn um diese Rotationsaxe herumzudrehen.«

Es lässt sich nun ebenfalls auf zwei Arten eine Anschauung von der Grösse des Trägheitsmomentes erlangen.

Einmal kann man fragen, welche Masse man in der Entfernung 1 von der Rotationsaxe in einem einzigen Punkte anbringen oder auf dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Radius gleich 1 ist, vertheilen müsste, um denselben Widerstand gegen die Drehung zu bekommen, welchen die Massentheilchen des Körpers bei ihren wirklichen Abständen von der Axe zusammen ausüben. Die Grösse dieser Masse ist im Allgemeinen von der Gesammtmasse des Körpers verschieden; sie ist direct durch Σmr^2 ausgedrückt, denn das Trägheitsmoment derselben ist

$$(\Sigma mr^2) \cdot 1^2 = \Sigma mr^2 ,$$

also dasselbe wie das des Gesammtkörpers.

Es ist nun, ähnlich wie beim Rotationsmoment, gebräuchlich, diese Veranschaulichung des Trägheitsmomentes direct als Definition desselben gelten zu lassen. Auch das ist nicht correct, denn Masse und Trägheitsmoment besitzen ja ebenfalls verschiedene Dimensionen.

Eine zweite, mehr geometrische Art der Veranschaulichung der Grösse des Trägheitsmomentes ist die, die Entfernung anzugeben, in welcher die wirkliche Gesammtmasse des Körpers in einem Punkte angebracht oder auf dem Mantel eines geraden Cylinders vertheilt werden müsste, damit sie denselben Widerstand gegen Rotationsbestrebungen ausübt als die Massentheilchen zusammen bei ihren Entfernungen von der Axe. Diese Entfernung nennt man den Trägheitsradius in Bezug auf die Rotationsaxe; seine Grösse ist durch $\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m}}$ gegeben, denn die Gesammtmasse Σm besitzt,

wenn sie in dieser Entfernung angebracht ist, ein Trägheitsmoment

$$\Sigma m \cdot \left(\sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}} \right)^2 = \Sigma m r^2 ,$$

d. h. wieder dasselbe wie das durch die einzelnen Massentheilchen in ihrer Gesammtheit hervorgebrachte. Bezeichnet man den Trägheitsradius mit $\varkappa$ und die Gesammtmasse Σm kurz mit M, so ist das Trägheitsmoment T ausgedrückt durch

$$T = M\varkappa^2 .$$

Diese letztere Veranschaulichung der Grösse des Trägheitsmomentes durch eine Strecke hat zwar den einen Nachtheil, dass die Strecke nicht proportional dem Trägheitsmoment selbst, sondern nur proportional der Quadratwurzel aus demselben ist, sie hat aber andererseits, ebenso wie die Veranschaulichung des Rotationsmomentes durch den idealen Hebelarm, den Vorzug grösserer Durchsichtigkeit. Aus diesem Grunde werden wir uns in dem Folgenden auch meistens dieser Veranschaulichung bedienen und das Trägheitsmoment eines Körpers als bestimmt ansehen, wenn der Trägheitsradius gefunden ist.

Aus dem Voraufgehenden folgt nun, dass die thatsächlich eintretende Winkelbeschleunigung eines um eine feste Axe drehbaren Körpers direct proportional der Grösse des Rotationsmomentes der angreifenden Kraft und umgekehrt proportional der Grösse des Trägheitsmomentes des Körpers, beide auf die Rotationsaxe bezogen, sein muss. Bezeichnet man die Winkelbeschleunigung mit w, das resultirende Rotationsmoment mit R und das Trägheitsmoment mit T, so besteht demnach bei geeigneter Wahl der Einheiten zwischen diesen drei Grössen die Relation

$$w = \frac{R}{T} .$$

Es spielen also Rotationsmoment und Trägheitsmoment dieselbe Rolle für die Rotation, wie Kraft und Masse für die Translation.

Da alle Bewegungen eines Körpers auf Translationen und Rotationen zurückgeführt werden können, und da ferner für diese Zurückführung im Sinne der Dynamik der Schwerpunkt des Körpers eine hervorragende Bedeutung besitzt, so ist schon daraus ersichtlich, dass die

Bewegung eines Körpers bestimmbar sein wird, wenn sowohl von den bewegenden Kräften: die Grösse, ihre Lage zum Schwerpunkte des Körpers und ihre Rotationsmomente in Bezug auf jede beliebige Axe des Raumes — als auch von dem in Bewegung zu setzenden Körper: die Masse, die Lage seines Schwerpunktes und seine Trägheitsmomente in Bezug auf alle Axen des Raumes bekannt sind.

Ebenso wichtig und nothwendig wie die Bestimmung der Grössen der Kräfte und ihrer Rotationsmomente ist daher die Untersuchung des in Bewegung zu setzenden Körpers in Bezug auf sein Verhalten gegenüber den angreifenden Kräften. Dazu ist aber nur erforderlich die Bestimmung 1) der Masse des Körpers, 2) der Lage seines Schwerpunktes und 3) der Trägheitsmomente desselben in Bezug auf alle Axen des Raumes. Durch diese drei Bestimmungsstücke ist ein Körper im mechanischen Sinne vollständig charakterisirt. Zwei Körper, welche in allen drei übereinstimmen, gelten für die Mechanik geradezu als äquivalent, mögen sie im Uebrigen noch so grosse Verschiedenheiten betreffs der Gestalt, der Zusammensetzung u. s. w. aufweisen.

Für eine Dynamik des menschlichen Körpers ist es daher vor allen Dingen nöthig, für das Object der Bewegung, d. h. also für die einzelnen Abschnitte des menschlichen Körpers, die genannten drei mechanischen Bestimmungsstücke zu ermitteln. Masse und Schwerpunktslage der Theile des menschlichen Körpers sind schon bestimmt worden. Die Trägheitsmomente derselben sind dagegen, so viel uns bekannt, noch niemals einer Untersuchung unterzogen worden.

Wir stellten uns aus diesem Grunde die Aufgabe, zunächst wenigstens für alle grösseren Abschnitte des menschlichen Körpers die Werthe der Trägheitsmomente in Bezug auf alle möglichen Axen des Raumes zu bestimmen.

Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente der einzelnen Körpertheile für Axen durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe und für die Längsaxe selbst.

Die Grösse eines Trägheitsmomentes kann man im Allgemeinen nicht durch Rechnung finden. Bei homogenen Körpern von geometrisch definirter Form ist es möglich; dann ist die Ermittelung des Trägheitsmomentes eine Aufgabe der Integralrechnung. Auch bei einigen Körpern von ungleicher Dichtigkeit ist die Aufgabe zu lösen, wenn sich nämlich die Dichtigkeit in der Weise ändert, dass der Körper als aus einer stetigen Folge homogener concentrischer Kugelschalen angesehen werden kann. Es lassen sich in diesem Falle, wie Schlömilch gezeigt hat, die Trägheitsmomente von symmetrischen Rotationskörpern auf die von Kugeln und Kugelschalen mit endlicher Dicke zurückführen.

Bei Körpern wie der menschliche kann man dagegen die Grössen der Trägheitsmomente nur auf empirischem Wege ableiten.

Man bestimmt dann gewöhnlich das Trägheitsmoment durch Messung von Schwingungen des an einem elastischen Draht oder an zwei Fäden aufgehängten Körpers. Handelt es sich beispielsweise um die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Magneten, so hängt man denselben so auf, dass er um eine verticale Axe schwingen kann und beobachtet seine Schwingungsdauer τ_1, darauf vergrössert man das Trägheitsmoment um eine bekannte Grösse T' (z. B. durch Anbringung zweier gleich weit von der Drehungsaxe entfernter gleich grosser Massen oder eines zur Drehungsaxe concentrischen Kreisringes von bekannten Dimensionen und bekannter Masse), bringt von Neuem den belasteten Magneten zum Schwingen und beobachtet wieder die Schwingungsdauer τ_2. Aus den drei Grössen τ_1, τ_2 und T' kann man dann ohne weitere Berücksichtigung der Dimensionen des Magneten das Trägheitsmoment ableiten. Es ist nämlich nach den für das physische Pendel geltenden Gesetzen bei gleichen Rotationsmomenten

$$\tau_1^2 : \tau_2^2 = T : (T + T') ,$$

woraus folgt

$$T = T' \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} .$$

Diese Methode, so einfach sie ist und so wenig Rechnung sie erfordert, liess sich aber für die Untersuchung sämmtlicher Körpertheile der Menschen nicht gut anwenden.

Nach einigen Vorversuchen kamen wir für unsere Zwecke auf folgende Versuchsanordnung: Wir verwandelten, wie seinerzeit bei der Bestimmung der Schwerpunktslagen, den Körper durch Gefrierenlassen in eine harte, starre Masse und liessen dann die einzelnen Abschnitte um horizontale Axen durch die Gelenkmittelpunkte wie ein Pendel hin und her schwingen. Bestimmt man ausser der Schwingungsdauer noch das Gewicht und die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, so kann man aus diesen drei Grössen das Trägheitsmoment für diese Axe ableiten, ohne die Schwingungsdauer für das um eine bekannte Grösse vermehrte Trägheitsmoment beobachtet zu haben.

Bezeichnet man mit T das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die feste Axe, mit e die Entfernung des Schwerpunktes und mit M die Masse des schwingenden Körpers, so ist die Dauer τ einer einfachen Pendelschwingung nach den Pendelgesetzen:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{T}{Mge}} ,$$

wobei g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Daraus ergibt sich

$$T = \frac{\tau^2 Mge}{\pi^2} .$$

Es gilt nun folgender Satz:

»Die Trägheitsmomente eines Körpers für alle möglichen Axen des Raumes sind bekannt, wenn man die Trägheitsmomente für alle Axen durch den Schwerpunkt kennt.«

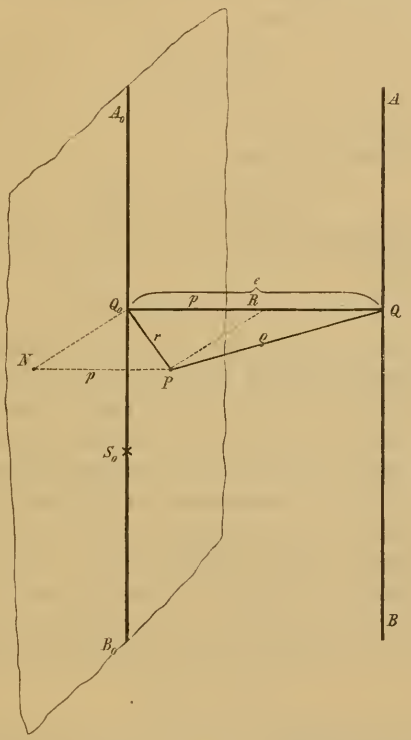
Ist nämlich T_0 das Trägheitsmoment für eine Axe durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist das Trägheitsmoment T für eine zu derselben parallele Axe in der Entfernung e

$$T = T_0 + Me^2 .$$

Dieser Satz ist leicht einzusehen.

Bezeichnet in nebenstehender Figur 1 $A_0 B_0$ eine Axe durch den Schwerpunkt S_0 des Körpers, AB eine dazu parallele Axe in

der Entfernung e, ist ferner P ein Punkt mit der Masse m, $PQ_0 = r$ seine Entfernung von der Axe A_0B_0 und $PQ = \varrho$ seine Entfernung von der Axe AB, und ist endlich $RQ_0 = PN = p$ die Projection der



Figur 1.

Strecke PQ_0 auf die Linie $Q_0Q = e$, so findet zwischen den Grössen r, ϱ, p und e die Relation statt

$$\varrho^2 = r^2 + e^2 - 2ep\,.$$

Nun besitzt das Trägheitsmoment des Massenpunktes P in Bezug auf die Axe A_0B_0 den Werth mr^2 und in Bezug auf die Axe AB den Werth $m\varrho^2$. Denkt man sich die Trägheitsmomente sämmtlicher Massenpunkte des Körpers in Bezug auf beide Axen gebildet, so ist

das Gesammtträgheitsmoment in jedem Falle die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Massenpunkte. Bezeichnet man mit T_0 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die Axe A_0B_0 durch den Schwerpunkt und mit T das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe AB, so ist also

$$T_0 = \Sigma mr^2$$

und

$$T = \Sigma m\varrho^2$$

oder nach der obigen Relation

$$T = \Sigma m\,(r^2 + e^2 - 2ep)\ .$$

Da hierin e eine constante Grösse ist, so kann man den Werth von T auch schreiben

$$T = \Sigma mr^2 + e^2 \cdot \Sigma m - 2e\,\Sigma mp\ .$$

Hierbei ist Σmr^2 das Trägheitsmoment T_0 in Bezug auf die Axe A_0B_0, Σm die Gesammtmasse M des Körpers und Σmp die Summe sämmtlicher Producte der Masse jedes einzelnen Punktes in seinen Abstand von einer festen durch A_0B_0 gehenden Ebene. Da diese Ebene durch den Schwerpunkt geht, so hat diese Summe bekanntlich den Werth 0; denn der Schwerpunkt hat ja eben die Eigenschaft, dass für jede durch ihn hindurchgehende Ebene die Massenvertheilung auf beiden Seiten insofern gleichwerthig ist, als die Summe der Producte der Masse jedes Punktes in seinen Abstand von der Ebene für beide Seiten derselben gleich ist, ihre algebraische Summe also den Werth 0 hat. Es ergibt sich in Folge dessen für T der Werth:

$$T = T_0 + Me^2\ .$$

Ist z_0 der Trägheitsradius für die Axe durch den Schwerpunkt, so kann man auch schreiben

$$T_0 = Mz_0^2$$

und in Folge dessen

$$T = M\,(z_0^2 + e^2)\ .$$

Setzt man diesen Werth in die obige Formel zur Bestimmung von T ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des Trägheitsradius z_0 für die zur Schwingungsaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt, nämlich

$$M(\varkappa_0^2 + e^2) = \frac{\tau^2 M g e}{\pi^2},$$

woraus folgt:

$$\varkappa_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{(g\tau^2 - \pi^2 e)\, e}.$$

Es ist also nöthig, die Schwingungsdauer τ und die Entfernung e der Schwingungsaxe vom Schwerpunkt experimentell zu bestimmen, um den Trägheitsradius $\varkappa_0$ für die zur Schwingungsaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt berechnen zu können. Die Grösse der Masse M ist dazu nicht erforderlich, wohl ist sie aber nöthig zur Bestimmung des Trägheitsmomentes selbst.

Man kann nun die directe Messung der Entfernung e, welche immer mit einer Ungenauigkeit behaftet ist, weil der Schwerpunkt gewöhnlich im Innern des betreffenden Körpertheils liegt, umgehen, wenn man den Körper nicht blos um eine Axe pendeln lässt, sondern um zwei zu einander parallele, deren Ebene den Schwerpunkt enthält.

Ist τ_1 die Schwingungsdauer für die eine Axe, e_1 deren Entfernung vom Schwerpunkt, sind ferner τ_2 und e_2 die entsprechenden Grössen für die andere Axe, so hat man

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{\varkappa_0^2 + e_1^2}{g e_1}}$$

$$\tau_2 = \pi\sqrt{\frac{\varkappa_0^2 + e_2^2}{g e_2}}$$

$$e_1 + e_2 = l,$$

wenn man unter l den Abstand der beiden Axen von einander versteht.

Aus diesen drei Gleichungen erhält man dann

$$e_1 = \frac{(\pi^2 l - g\tau_2^2)\, l}{2\pi^2 l - g(\tau_1^2 + \tau_2^2)}$$

$$e_2 = \frac{(\pi^2 l - g\tau_1^2)\, l}{2\pi^2 l - g(\tau_2^2 + \tau_1^2)}$$

und daraus unter Benutzung je eines dieser Werthe

$$x_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{(g\tau_1^2 - \pi^2 e_1)\, e_1}$$

und

$$x_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{(g\tau_2^2 - \pi^2 e_2)\, e_2},$$

wodurch man zugleich eine Controle für die Rechnung ausüben kann.

Da man nun die Dauer der Pendelschwingungen ziemlich genau messen kann, indem man die Dauer einer sehr grossen Zahl von Schwingungen mit kleiner Amplitude beobachtet, so hat man darin ein Mittel, den Trägheitsradius mit der Genauigkeit zu bestimmen, welche bei der Genauigkeit, mit welcher man die Entfernung l der beiden Axen gemessen hat, überhaupt berechtigt ist, und man kann auch gleichzeitig die experimentell bestimmte Lage des Schwerpunktes controliren.

Bei unserer ersten Versuchsreihe haben wir nun zunächst im Allgemeinen nicht um zwei Axen pendeln lassen, sondern uns mit der directen Messung der Schwerpunktslage begnügt.

I. Versuchsreihe: Ein normalgebauter, muskelkräftiger Leichnam (Selbstmörder) wurde durch Frierenlassen in eine starre Masse verwandelt. Nach dem Zerschneiden an den Gelenken in die einzelnen Abschnitte wurde jedesmal das Gewicht und die Entfernung des Schwerpunktes des betreffenden Körpertheiles von den begrenzenden Gelenken bestimmt. Darauf wurde die Dauer von einfachen Pendelschwingungen um Axen durch die Gelenkmittelpunkte bestimmt, deren Richtungen aus den Bemerkungen zu der nachfolgenden Tabelle hervorgehen. In dieser Tabelle finden sich die Resultate aller directen Messungen eingetragen.

Tabelle der für die Berechnung der Trägheitsmomente erforderlichen Grössen.

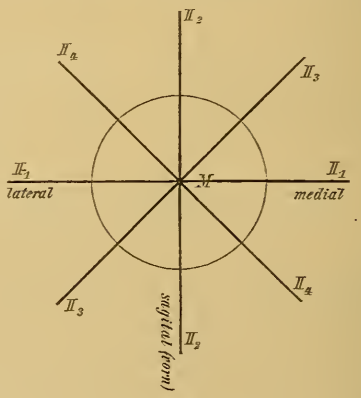
(I. Versuchsreihe.)

Körpertheile		Gewicht (in Gramm)	Länge (in Centimetern)	Entfernung des Schwerpunktes von oben c_1	Entfernung des Schwerpunktes von unten c_2	Dauer t einer einfachen Pendelschwingung mit kleiner Amplitude, durch Beobachtung von 100 Schwingungen gemessen (in Secunden) 1	2	3	4	5	6	7
I. Rumpf + Kopf		28450	78,0	45,0	33,0	0,658	—	—	—	—	—	—
II. Ganze untere Extremität	r	10160	87,0	35,0	52,0	0,714	0,705	0,690	0,680	—	—	—
	l	10680	87,0	35,0	52,0	0,708	0,714	0,716	0,690	—	—	—
III. Oberschenkel	r	6450	40,0	17,5	22,5	0,488	0,484	0,490	0,488	0,522	0,352	0,366
	l	6990	40,0	16,5	23,5	0,488	0,496	0,488	0,500	0,534	0,346	0,364
IV. Unterschenkel + Fuss	r	3680	47,0	25,0	22,0	0,586	—	—	—	—	—	—
	l	3670	47,0	25,0	22,0	0,584	—	—	—	—	—	—
V. Unterschenkel	r	2680	39,0	16,5	22,5	0,474	0,518	—	—	—	—	—
	l	2660	39,0	16,0	23,0	0,474	0,518	—	—	—	—	—
VI. Fuss	r	990	20,0	6,0	14,0	0,346	—	—	—	—	—	—
	l	1000	20,0	6,0	14,0	0,354	—	—	—	—	—	—
VII. Ganze obere Extremität	r	3160	65,0	26,0	39,0	0,616	0,620	0,616	0,606	—	—	—
	l	3290	64,0	26,5	37,5	0,622	0,622	0,622	0,614	—	—	—
VIII. Oberarm	r	1710	28,5	13,0	15,5	0,424	0,426	0,424	0,446	0,436	0,246	0,280
	l	1850	29,5	13,5	16,0	0,430	0,410	0,426	0,426	0,448	0,260	0,268
IX. Unterarm + Hand	r	1440	37,0	17,0	20,0	0,474	—	—	—	—	—	—
	l	1420	36,0	16,5	19,5	0,476	—	—	—	—	—	—
Ganzer Körper		58500	165,0									

Dabei hatten die durch die Gelenkmittelpunkte gehenden Axen, welche für jeden Körpertheil von 1 ab numerirt sind (z. B. für den Oberschenkel und für den Oberarm von 1 bis 7) folgende Richtung: (Die römische Zahl drückt den Körpertheil und der angehängte Index die Nummer der Axe aus.)

I_1 Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte.

II_1 bis II_4 Axen durch den Mittelpunkt des Hüftgelenks in der zur Längsaxe des Oberschenkels senkrechten Ebene. Ihre Richtung geht aus der beistehenden schematischen Fig. 2 eines Horizontal-



Figur 2. Horizontalschnitt durch die Mitte des Hüftgelenks. *M* Mittelpunkt. (Von oben gesehen.)

durchschnittes für das rechte Hüftgelenk hervor. Für das linke Hüftgelenk lagen die vier Axen symmetrisch.

III_1 bis III_4 genau dieselben Axen wie II_1 bis II_4.

III_5 Knieaxe.

III_6 Axe nahezu parallel der Längsaxe des Oberschenkels. Als Entfernung derselben vom Schwerpunkt des Oberschenkels hatte sich ergeben rechts 10,0 cm, links 8,5 cm. Doch sind diese Messungen nicht ganz sicher, da bei der Aufhängung des Gliedes die Entfernung des Schwerpunktes sich etwas änderte.

III_7 ebenfalls Axe annähernd parallel der Längsaxe des Oberschenkels. Entfernung des Schwerpunktes des Oberschenkels von der Axe rechts ungefähr 9,5 cm, links ungefähr 10,0 cm.

IV_1 Knieaxe.

V_1 Knieaxe.

V_2 Axe des ersten Fussgelenks.

VI_1 Axe des ersten Fussgelenks.

VII_1 bis VII_4 Axen durch das Schultergelenk in einer zur Längsaxe des Oberarms senkrechten Ebene. Ihre Richtungen entsprechen genau den bezüglichen Axen II_1 bis II_4 durch das Hüftgelenk.

VIII_1 bis VIII_4 dieselben Axen wie VII_1 bis VII_4.

VIII_6 Axe nahezu parallel der Längsaxe des Oberarms. Die Entfernung derselben vom Schwerpunkt des Oberarms betrug rechts nahezu 6,0 cm, links 5,5 cm. Doch sind diese Messungen ebenso unsicher wie die bei den Axen III_6 und III_7.

VIII_7 ebenfalls Axe annähernd parallel der Längsaxe des Oberarms. Entfernung derselben vom Schwerpunkt des Oberarms rechts ungefähr 5,5 cm, links ungefähr 4,5 cm.

IX_1 Ellbogenaxe.

Zunächst empfiehlt es sich, in allen den Fällen, bei denen die Schwingungsdauern um zwei parallele Axen, deren Ebene den Schwerpunkt enthält, bestimmt worden sind, die Formeln auf S. 19 zu verwenden, um die Abstände e_1 und e_2 des Schwerpunktes von den benachbarten Gelenkmittelpunkten zu berechnen und dadurch die direct gemessenen Werthe zu controliren.

Diese Fälle beziehen sich auf den Oberschenkel, Oberarm und Unterschenkel. Bei den beiden ersten sind die Axen Nr. 1 und 5, beim letzten die Axen Nr. 1 und 2 mit grosser Annäherung parallel, und der Schwerpunkt liegt nach unseren früheren Untersuchungen in der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke, also auch in der Ebene, die durch die beiden parallelen Axen bestimmt ist.

Es ist nach der Tabelle auf S. 21 für den rechten Oberschenkel

$$r_1 = 0{,}488$$
$$r_2 = 0{,}522$$
$$l = 40{,}0\,.$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung des Werthes 980,8[1]) für die Schwerebeschleunigung als Werth von e_1 17,7 cm, während die directe Messung 17,5 cm ergeben hatte.

Für den linken Oberschenkel ist

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0{,}488 \\ \tau_2 &= 0{,}534 \\ l &= 40{,}0\,, \end{aligned}$$

woraus durch die Rechnung folgt: $e_1 = 16{,}7$ cm, während der direct gemessene Werth 16,5 cm war.

Für den rechten Oberarm hat man

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0{,}424 \\ \tau_2 &= 0{,}436 \\ l &= 28{,}5\,, \end{aligned}$$

woraus folgt $e_1 = 13{,}5$ cm. Die directe Messung hatte 13,0 cm ergeben.

Für den linken Oberarm ist gefunden worden

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0{,}430 \\ \tau_2 &= 0{,}448 \\ l &= 29{,}5\,, \end{aligned}$$

woraus man berechnet $e_1 = 13{,}6$ cm, während durch directe Messung sich 13,5 cm ergeben hatte.

Für den rechten und linken Unterschenkel ist übereinstimmend gefunden worden

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0{,}474 \\ \tau_2 &= 0{,}518 \\ l &= 39{,}0\,; \end{aligned}$$

daraus folgt durch Rechnung $e_1 = 16{,}6$ cm, während die directe

1) Dieser Werth gilt zwar nur für den Breitengrad von Paris, seine Abweichung von dem für Leipzig geltenden Werthe ist aber nicht so gross, als dass sie auf die bei dieser ersten Versuchsreihe erreichbare Genauigkeit Einfluss haben könnte. Bei der späteren Versuchsreihe ist der genauere Werth für Leipzig zur Anwendung gekommen (vgl. S. 46).

Messung für den rechten Unterschenkel 16.5 cm und für den linken 16,0 cm ergeben hatte.

Man sieht also, dass die berechneten Schwerpunktsentfernungen in diesen sechs Beispielen so gut mit den direct gemessenen übereinstimmen, als überhaupt bei der Genauigkeit, mit der sich diese Entfernungen direct messen liessen, möglich war. Man hat daher in der doppelten Beobachtung der Schwingungsdauer für zwei parallele Axen, in deren Ebene der Schwerpunkt liegt, eine andere, und wie man mit Sicherheit voraussagen kann, genauere Methode der Bestimmung der Lage des Schwerpunktes, als die früher von uns angewendete; denn die dabei benutzte directe Messung der Entfernung der beiden Axen von einander lässt sich mit grösserer Genauigkeit ausführen, als die directe Messung der Entfernung des im Innern des Gliedes befindlichen Schwerpunktes von einer der beiden Axen.

Unter Anwendung der Formeln auf S. 19 zur Berechnung von z_0 erhält man aus den Befunden der Tabelle auf S. 21 die Werthe für den Trägheitsradius und das Trägheitsmoment in Bezug auf Axen durch den Schwerpunkt eines Gliedes, welche in der Tabelle auf S. 27 niedergelegt sind.

Es sind dabei nur die Trägheitsradien berechnet worden, welche zu der frontalen, zur Längsaxe senkrechten Axe durch den Schwerpunkt des ganzen Beins, des Oberschenkels, des ganzen Armes und des Oberarmes gehören, und nicht auch die, welche den anderen in der Tabelle auf S. 21 mit Nr. 2, 3 und 4 bezeichneten Axen entsprechen. Aus den Werthen der Schwingungsdauer τ für die vier mit Nr. 1 bis 4 bezeichneten verschiedenen Axen der oben angegebenen Glieder und Gliedersysteme ergibt sich nämlich, dass die Trägheitsradien in Bezug auf diese vier Axen mit grosser Annäherung gleich gross sind. Denn die Schwingungsdauern zeigen nur sehr geringe Grössenunterschiede, und diese Differenzen haben für die rechte und linke Extremität keineswegs denselben Richtungssinn. Man kann dieselben daher nicht auf eine gesetzmässige Aenderung des Trägheitsmomentes zurückführen, sondern muss sie den Fehlerquellen zuschreiben, welche einestheils in dem Abtrennen der einzelnen Gliedmaassen, andererseits in der Art der Anbringung der Axen liegen mögen. Es gilt daher mit grosser Annäherung der Satz:

»Bei den ganzen Extremitäten sowohl, als ihren Theilen sind die Trägheitsmomente in Bezug auf vier, und infolgedessen, wie später abgeleitet wird (vgl. S. 67 und 68), in Bezug auf alle Axen durch den Schwerpunkt, welche auf der Längsaxe des Gliedes senkrecht stehen, gleich gross.«

Anders verhält es sich mit dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Längsaxe des Gliedes selbst. Für diese wird es kleiner sein als für die anderen Axen. Das geht schon aus dem Umstande hervor, dass die Masse des Gliedes viel dichter um die Längsaxe gelagert ist als um irgend eine andere Axe.

Die Bestimmung des Trägheitsradius für die Längsaxe war bei dieser unserer ersten Versuchsreihe infolge der dabei verwendeten Methode der Anbringung der Axen weniger genau, weil, wie schon oben erwähnt wurde, einerseits die Messung der Entfernung der Axen vom Schwerpunkt sehr unsicher war, und weil andererseits gerade hier in der grossen Nähe des Schwerpunktes ein kleiner Fehler in der Messung der Schwerpunktsentfernung einen viel grösseren Einfluss auf die Genauigkeit des Resultates ausübt, als bei Axen in grösserem Abstand vom Schwerpunkt. Aus diesem Grunde haben wir schon in jedem Falle zwei Messungen um verschiedene Axen ausgeführt und aus den Resultaten das Mittel gezogen. Eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle lag auch darin, dass es nicht möglich war, die Axen, welche in den schon etwas aufgethauten Weichtheilen befestigt wurden, während der Schwingung parallel der Längsaxe zu halten. Trotzdem also diesen Bestimmungen des Trägheitsmomentes in Bezug auf die Längsaxe des Gliedes kein grosser Werth beigelegt werden kann, so sind die gefundenen Grössen doch mit in die folgende Tabelle eingetragen worden, weil sie wenigstens einen vorläufigen, orientirenden Ueberblick gewähren.

Die Trägheitsradien und Trägheitsmomente für Axen durch den Schwerpunkt eines Körperabschnittes.

(I. Versuchsreihe.)

Körpertheile		Masse (g)	Länge l (cm)	Entfernung des Schwerpunktes von oben e_1 (cm)	Entfernung des Schwerpunktes von unten e_2 (cm)	Trägheitsradius $\varkappa$ und Trägheitsmoment $T = m\varkappa^2$ für Axen durch den Schwerpunkt. Axe senkrecht zur Längsaxe des Gliedes: $\varkappa_0$ (cm)	Axe senkrecht zur Längsaxe des Gliedes: $T = m\varkappa_0^2$ (cm²·g)	Längsaxe des Gliedes: $\varkappa_0$ (cm)	Längsaxe des Gliedes: $T = m\varkappa_0^2$ (cm²·g)
Rumpf + Kopf		28450	78,0	45,0	33,0	18,2	9417000	—	—
Oberarm	r	1710	28,5	13,5	15,0	7,7	101000	1,8 (?)	—
	l	1850	29,4	13,6	15,9	8,1	121000	3,1	18000
Unterarm + Hand	r	1440	37,0	17,0	20,0	9,5	130000	—	—
	l	1420	36,0	16,5	19,5	10,0	142000	—	—
Oberschenkel	r	6450	40,0	17,7	22,3	10,3	684000	5,4	19000
	l	6990	40,0	16,7	23,3	10,8	818000	5,5	21000
Unterschenkel + Fuss	r	3680	47,0	25,0	22,0	15,1	839000	—	—
	l	3670	47,0	25,0	22,0	14,9	814000	—	—
Unterschenkel	r	2680	39,0	16,5	22,5	9,8	257000	—	—
	l	2660	39,0	16,0	23,0	10,1	271000	—	—
Fuss	r	990	20,0	6,0	14,0	6,0	36000	—	—
	l	1000	20,0	6,0	14,0	6,2	38000	—	—
Ganzer Körper		58500	165,0						

Diese Werthe genügen, um, wie später erläutert wird, die Trägheitsradien und Trägheitsmomente für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt abzuleiten.

Berechnet man das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius z_0 für Axen senkrecht der Längsaxe des Gliedes und der Länge l eines jeden Körpertheils, also den Werth des Quotienten $\frac{z_0}{l}$, so ergibt sich aus den Zahlen der sechsten und dritten Spalte:

		$\frac{z_0}{l}$
für Rumpf + Kopf		0,23
Oberarm	r:	0,27
	l:	0,27
Unterarm + Hand	r:	0,26
	l:	0,28
Oberschenkel	r:	0,26
	l:	0,27
Unterschenkel + Fuss	r:	0,32
	l:	0,32
Unterschenkel	r:	0,25
	l:	0,26
Fuss	r:	0,30
	l:	0,31

Es zeigt sich also, dass dieses Verhältniss nahezu denselben Werth für alle Körpertheile besitzt.

Als Mittelwerth desselben, sowohl mit als auch ohne Benutzung des Systems »Rumpf + Kopf« ergibt sich 0,28

Da sowohl für die ganzen Extremitäten als auch für die einzelnen Abschnitte derselben die Werthe von z_0 berechnet worden sind, so hat man darin eine Controle für die Messungen, dass man aus den Trägheitsmomenten der Theile das der ganzen Extremität ableitet.

Hat man zwei durch ein Gelenk mit einander verbundene Glieder, wie z. B. (Fig. 3) Oberschenkel einerseits und das System »Unterschenkel + Fuss« andererseits (wobei Unterschenkel und Fuss als eine einzige starre Masse betrachtet werden soll), bedeuten m_1, m_2 die Massen, z_1. z_2 die Trägheitsradien für Axen durch die Schwerpunkte S_1, S_2 der beiden Glieder, welche mit der Gelenkaxe (Knieaxe) parallel laufen, und bedeuten endlich s_1, s_2 die Abstände der beiden Schwerpunkte S_1, S_2 von der Gelenkaxe K, so gilt zunächst für die Entfernung d der beiden Schwerpunkte die Bestimmungsgleichung

$$d_2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\omega ,$$

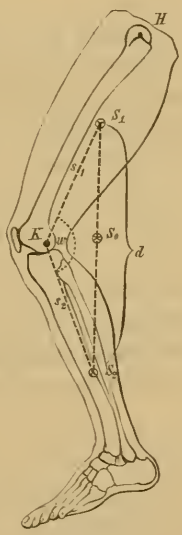
wo ω den Winkel zwischen den beiden Strahlen vom Gelenkmittelpunkte K nach den Schwerpunkten S_1, S_2, d. h. also den Beugungswinkel bedeutet. Der Gesammtschwerpunkt S_0 liegt bekanntlich auf der Verbindungslinie S_1 S_2 und theilt dieselbe im umgekehrten Verhältniss der beiden Massen. Es ist demnach seine Entfernung vom Schwerpunkte S_1 gleich $\frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ und seine Entfernung vom Schwerpunkte S_2 gleich $\frac{m_1}{m_1 + m_2} d$.

Nach dem auf S. 18 angeführten Satze ist dann unter der Voraussetzung, dass die Gelenkaxe senkrecht zu der Ebene der drei Punkte S_1, K, S_2 steht, das Trägheitsmoment des Oberschenkels allein in Bezug auf die durch S_0 gehende. ebenfalls der Gelenkaxe parallele Axe

$$m_1 \left[z_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} d \right)^2 \right]$$

und das Trägheitsmoment des Systems »Unterschenkel + Fuss« in Bezug auf die Axe durch S_0

$$m_2 \left[z_2^2 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} d \right)^2 \right] .$$



Figur 3.

Bezeichnet man mit z_0 den Trägheitsradius für die ganze Extremität in Bezug auf die durch den Gesammtschwerpunkt S_0 gehende und zur Gelenkaxe parallele Axe, so dass also das Trägheitsmoment der ganzen Extremität ausgedrückt wird durch $(m_1 + m_2) z_0^2$, so hat man die Relation:

$$(m_1 + m_2) z_0^2 = m_1 \left[z_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} d \right)^2 \right] + m_2 \left[z_2^2 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} d \right)^2 \right] ,$$

denn das Trägheitsmoment eines Systems von Körpern ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Körper in Bezug auf dieselbe Axe.

Bei einiger Umformung erhält man daraus

$$(m_1 + m_2) z_0^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 ,$$

d. h. aber:

»Das Trägheitsmoment eines Systems von zwei Körpern in Bezug auf eine beliebige Axe durch den Gesammtschwerpunkt ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Theile in Bezug auf die durch die Einzelschwerpunkte gehenden parallelen Axen, vermehrt um das Product aus der Masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ in das Quadrat der Entfernung der Einzelschwerpunkte von einander.«

Daraus geht hervor, dass das Trägheitsmoment eines Systems von Körpern für eine Axe durch den Gesammtschwerpunkt immer grösser ist als die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile für die parallelen Axen durch die Einzelschwerpunkte.

Wenn man in die Relation auf S. 29 den Werth für d^2 einsetzt, so folgt daraus:

$$(m_1 + m_2) z_0^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\omega),$$

eine Relation, welche mit Ausnahme von z_0 und ω lauter constante Grössen enthält. Man kann sie daher zur Berechnung des Trägheitsradius und Trägheitsmomentes der ganzen Extremität für jede beliebige Beugestellung verwenden. Es ergibt sich

$$z_0 = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} z_1^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} z_2^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\omega)}.$$

Während der Schwingungen der ganzen unteren als auch der oberen Extremitäten war das Kniegelenk, bezüglich Ellbogengelenk, nahezu gestreckt. Der Winkel ω hatte also in diesen Fällen annähernd den Werth von 180°. Da $\cos 180° = -1$, so geht für diese Fälle die Formel zur Berechnung von z_0 über in

$$z_0 = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} z_1^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} z_2^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (s_1 + s_2)^2}.$$

Für die rechte untere Extremität ist

$m_1 = 6450$	$m_2 = 3680$
$z_1 = 10{,}3$	$z_2 = 15{,}1$
$s_1 = 22{,}3$	$s_2 = 25{,}0$

Daraus folgt $z_0 = 25{,}6$ cm. Aus den Werthen für die Schwingungsdauer τ und den Schwerpunktsabstand e der ganzen Extremität

$$\tau = 0.714 \quad \text{und} \quad e = 35{,}0 \quad \text{(Tabelle auf S. 21)}$$

folgt dagegen nach der Formel auf S. 19 der Werth $z_0 = 23{,}4$ cm. Es ist also ein Unterschied von über 2 cm vorhanden zwischen dem Werthe des Trägheitsradius, welcher aus der directen Messung der Schwingungsdauer der ganzen Extremität gewonnen und dem Werthe, welcher aus den Trägheitsmomenten der beiden Gliederabschnitte berechnet wurde.

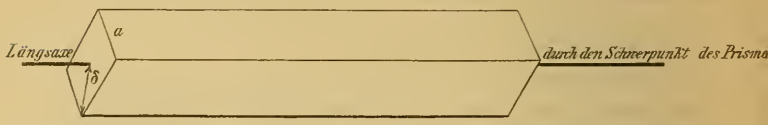
Wenn auch dieser Unterschied nicht sehr gross ist, so stand doch zu erwarten, dass man eine bei Weitem grössere Uebereinstimmung erzielen würde, wenn man die hauptsächlichste Fehlerquelle bei unserer ersten Versuchsreihe, nämlich die Reibung, so weit als möglich eliminirte.

Um nicht fremdes Trägheitsmoment hereinzubringen, hatten wir bei allen bisher beschriebenen Versuchen die Axe, welche entweder aus einer Stahlnadel oder aus zwei sich gegenüberstehenden Stahlspitzen gebildet war, mit der Umgebung fest verbunden. In Folge dessen musste sich das Glied bei seinen Schwingungen um diese feste Stahlaxe herumdrehen. Es ist ersichtlich, dass dabei die Reibung zwischen den Geweben des schwingenden Gliedes und der Stahlaxe einen ziemlichen Einfluss auf die Schwingungsdauer ausüben musste, und dass dadurch die Resultate getrübt wurden.

II. Versuchsreihe. Wir haben uns bei einer zweiten Versuchsreihe von dieser Fehlerquelle dadurch unabhängig gemacht, dass wir die Stahlaxe fest mit dem schwingenden Körper verbanden. Zu diesem Zwecke war es nöthig, die Stäbe dicker zu nehmen und nicht mit rundem Querschnitt, sondern mit quadratischem. Dadurch wurde erst eine unverrückbare Befestigung der Stahlaxe in dem Gliede möglich. Die Kante des Stahlstabes, welche dem Schwerpunkte des Gliedes am nächsten lag, wurde als Schwingungsaxe benutzt, indem man sie an zwei Stellen auf senkrecht zu ihr gerichtete Glasstäbchen mit kleinem Durchmesser auflegte. Dadurch war die Reibung beim Schwingen auf ein Minimum herabgedrückt. Es zeigte sich nämlich, dass ein einmal in Schwingung versetztes Glied stundenlang im Schwingen verharrte.

Um die Entfernung des Schwerpunktes von der Schwingungsaxe genauer zu bekommen, als es durch directe Messung möglich ist, haben wir bei dieser zweiten Versuchsreihe in allen Fällen um zwei parallele Axen pendeln lassen, deren gemeinsame Ebene den Schwerpunkt enthielt. Die beiden Stahlstäbe wurden, mit wenig Ausnahmen, vor der Schwingungsbeobachtung fest mit dem Körpertheil verbunden und blieben beide während des Schwingens im Glied. Das hatte einerseits den Vortheil, dass man sie genauer einander parallel richten und die Unverrückbarkeit ihrer Lage zu einander und zum Glied controliren konnte, und dass man ausserdem ihren Abstand viel genauer messen konnte, als es bei der ersten Versuchsreihe der Fall war. Diese Anordnung des Versuchs hatte aber andererseits den Nachtheil, dass die Trägheitsmomente der beiden Stäbe die Schwingungsdauer beeinflussten, und dass infolgedessen die Berechnung des Trägheitsradius, welche natürlich diese nicht zum Gliede gehörenden Trägheitsmomente wieder eliminiren musste, unbequemer wurde. Dieser Nachtheil konnte uns aber nicht dazu veranlassen, den Vortheil preiszugeben, welchen wir betreffs der Genauigkeit der Resultate durch diese wesentlich veränderte Versuchsanordnung erhoffen durften.

Die jetzt nöthigen Formeln leitet man auf folgende Weise ab.



Figur 4.

Nebenstehende Figur 4 stelle ein solches Stahlprisma dar, dessen Länge in Wirklichkeit natürlich grösser im Verhältniss zur Dicke war als es die Figur zeigt. Der Querschnitt des Prismas sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a, die Masse sei μ. Dann ist das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längsaxe bei Annahme vollständiger Homogeneität bekanntlich $\mu \frac{a^2}{6}$ oder, wenn man an Stelle von a die halbe Länge δ der Diagonale des Quadrats einführt: $\mu \frac{\delta^2}{3}$, weil, wie leicht ersichtlich $a^2 = 2\delta^2$ ist.

Bezeichnet ferner in untenstehender Figur 5 S den Schwerpunkt eines Gliedes allein (ohne Berücksichtigung der Schwere der Stahlstäbe), ε_1, ε_2 die Entfernungen desselben von den ihm zunächst liegenden Kanten A_1, A_2 der beiden Stahlstäbe, welche als Schwingungsaxen benutzt werden (in der Figur die stark gezeichneten Kanten), und liegt der Schwerpunkt S genau in der durch die beiden parallelen Axen A_1, A_2 bestimmten Ebene, so muss, wenn die Entfernung dieser beiden Axen λ ist,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \lambda \text{ sein.}$$

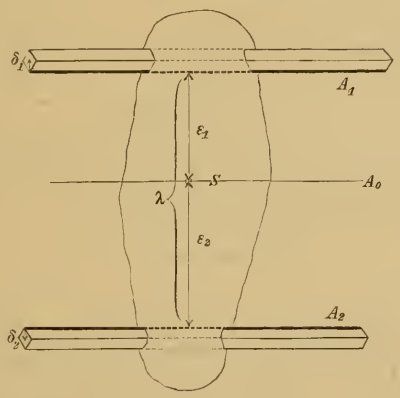


Fig. 5.

Bezeichnet ferner

m die Masse des Gliedes (ohne die Stahlstäbe),

$\varkappa_0$ den Trägheitsradius des Gliedes allein in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S gehende und zu A_1, A_2 parallele Axe A_0,

μ_1 die Masse des Stahlstabes mit der Axe A_1,

δ_1 die halbe Diagonale seines Querschnitts,

μ_2 die Masse des anderen Stahlstabes mit der Axe A_2,

δ_2 die halbe Diagonale seines Querschnitts,

τ_1 die Schwingungsdauer des Massensystems (Glied und Stahlstäbe zusammen) für die Schwingungsaxe A_1 bei kleiner Schwingungsamplitude,

τ_2 die entsprechende Schwingungsdauer für die Axe A_2,

g die Beschleunigung der Schwere,

so ist zunächst in Bezug auf die Axe A_1:

das Trägheitsmoment des Gliedes allein

$$m(\varkappa_0^2+\varepsilon_1^2),$$

das Trägheitsmoment des oberen Stahlstabes

$$\mu_1\left(\frac{\delta_1^2}{3}+\delta_1^2\right)=\tfrac{4}{3}\mu_1\delta_1^2,$$

das Trägheitsmoment des unteren Stahlstabes

$$\mu_2\left(\frac{\delta_2^2}{3}+(\lambda+\delta_2)^2\right)=\tfrac{1}{3}\mu_2[\delta_2^2+3(\lambda+\delta_2)^2],$$

und in Bezug auf die Axe A_2:

das Trägheitsmoment des Gliedes allein

$$m(\varkappa_0^2+\varepsilon_2^2),$$

das Trägheitsmoment des oberen Stahlstabes

$$\mu_1\left(\frac{\delta_1^2}{3}+(\lambda+\delta_1)^2\right)=\tfrac{1}{3}\mu_1[\delta_1^2+3(\lambda+\delta_1)^2],$$

das Trägheitsmoment des unteren Stahlstabes

$$\mu_2\left(\frac{\delta_2^2}{3}+\delta_2^2\right)=\tfrac{4}{3}\mu_2\delta_2^2.$$

Daraus folgt nach den Pendelgesetzen:

$$\tau_1=\pi\sqrt{\frac{m(\varkappa_0^2+\varepsilon_1^2)+\tfrac{4}{3}\mu_1\delta_1^2+\tfrac{1}{3}\mu_2[\delta_2^2+3(\lambda+\delta_2)^2]}{g[m\varepsilon_1+\mu_1\delta_1+\mu_2(\lambda+\delta_2)]}}$$

$$\tau_2=\pi\sqrt{\frac{m(\varkappa_0^2+\varepsilon_2^2)+\tfrac{1}{3}\mu_1[\delta_1^2+3(\lambda+\delta_1)^2]+\tfrac{4}{3}\mu_2\delta_2^2}{g[m\varepsilon_2+\mu_1(\lambda+\delta_1)+\mu_2\delta_2]}},$$

denn die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist unter Voraussetzung sehr kleiner Schwingungsamplitude gleich $\pi\sqrt{\frac{T}{gD}}$, wo T die Summe sämmtlicher Trägheitsmomente und D die Summe der Producte sämmtlicher Massentheilchen in ihre Entfernung von der Schwingungsaxe bedeutet. Aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\lambda$$

ergibt sich für die Schwerpunktsentfernungen:

$$\varepsilon_1=\frac{\lambda[m(\pi^2\lambda-g\tau_2^2)+g(\mu_2\tau_1^2-\mu_1\tau_2^2)+2\pi^2(\mu_1\delta_1-\mu_2\delta_2)+\pi^2\lambda(\mu_1-\mu_2)]+g(\tau_1^2-\tau_2^2)(\mu_1\delta_1+\mu_2\delta_2}{m[2\pi^2\lambda-g(\tau_1^2+\tau_2^2)]}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\lambda[m(\pi^2\lambda-g\tau_1^2)+g(\mu_1\tau_2^2-\mu_2\tau_1^2)+2\pi^2(\mu_2\delta_2-\mu_1\delta_1)+\pi^2\lambda(\mu_2-\mu_1)]+g(\tau_2^2-\tau_1^2)(\mu_2\delta_2+\mu_1\delta_1)}{m[2\pi^2\lambda-g(\tau_1^2+\tau_1^2)]}$$

Nach Berechnung von ε_1, ε_2 folgt dann für den Trägheitsradius z_0 des Gliedes allein in Bezug auf die Axe A_0 durch den Schwerpunkt:

$$z_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{m}}\sqrt{m\varepsilon_1(g\tau_1^2 - \pi^2\varepsilon_1) + g\tau_1^2\mu_1\delta_1 + \mu_2\delta_2 + \mu_2\lambda) - \pi^2\left[\tfrac{4}{3}(\mu_1\delta_1^2 + \mu_2\delta_2^2) + \mu_2\lambda(2\delta_2 + \lambda)\right]}$$

und zur Controle

$$z_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{m}}\sqrt{m\varepsilon_2(g\tau_2^2 - \pi^2\varepsilon_2) + g\tau_2^2\mu_2\delta_2 + \mu_1\delta_1 + \mu_1\lambda) - \pi^2\left[\tfrac{4}{3}\mu_2\delta_2^2 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_1\lambda(2\delta_1 + \lambda)\right]}.$$

Bei einigen Schwingungsbeobachtungen hatten wir nur den einen Stahlstab, dessen eine Kante die Axe abgab, während des Schwingens im Glied.

Für diese Fälle vereinfachen sich die Formeln folgendermassen:

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{m(z_0^2 + \varepsilon_1^2) + \tfrac{4}{3}\mu_1\delta_1^2}{g(m\varepsilon_1 + \mu_1\delta_1)}}$$

$$\tau_2 = \pi\sqrt{\frac{m(z_0^2 + \varepsilon_2^2) + \tfrac{4}{3}\mu_2\delta_2^2}{g(m\varepsilon_2 + \mu_2\delta_2)}}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \lambda.$$

Daraus folgt dann:

$$\varepsilon_1 = \frac{m\lambda(\pi^2\lambda - g\tau_2^2) + g(\tau_1^2\mu_1\delta_1 - \tau_2^2\mu_2\delta_2) - \tfrac{4}{3}\pi^2(\mu_1\delta_1^2 - \mu_2\delta_2^2)}{m[2\pi^2\lambda - g(\tau_1^2 + \tau_2^2)]}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{m\lambda(\pi^2\lambda - g\tau_1^2) + g(\tau_2^2\mu_2\delta_2 - \tau_1^2\mu_1\delta_1) - \tfrac{4}{3}\pi^2(\mu_2\delta_2^2 - \mu_1\delta_1^2)}{m[2\pi^2\lambda - g(\tau_2^2 + \tau_1^2)]}$$

und für den Trägheitsradius nach Berechnung von ε_1 und ε_2:

$$z_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{m}}\sqrt{m\varepsilon_1(g\tau_1^2 - \pi^2\varepsilon_1) + g\tau_1^2\mu_1\delta_1 - \tfrac{4}{3}\pi^2\mu_1\delta_1^2}$$

und zur Controle

$$z_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{m}}\sqrt{m\varepsilon_2(g\tau_2^2 - \pi^2\varepsilon_2) + g\tau_2^2\mu_2\delta_2 - \tfrac{4}{3}\pi^2\mu_2\delta_2^2}.$$

Unter diesen Gesichtspunkten gestaltete sich nun die zweite Versuchsreihe folgendermassen:

Der normal gebaute, mässig muskulöse Körper eines jungen Mannes (Selbstmörder, gehängt), bei dem der Bauch nicht aufgetrieben war, wurde wie für die I. Versuchsreihe durch Frierenlassen in eine starre Masse verwandelt. Darauf wurden die oberen

und unteren Extremitäten mittelst Säge und Messer so vom Rumpfe abgelöst, dass die Gelenkköpfe dabei nicht zersägt, sondern im Ganzen exarticulirt waren. Die Schwingungsbeobachtungen wurden dann in folgender Weise ausgeführt.

1) Schwingungen des Systems: Rumpf + Kopf.

Zuerst wurde durch die Pfannen der Hüftgelenke in der Richtung der Verbindungslinie der Gelenkmittelpunkte ein starker Stahlstab mit quadratischem Querschnitt so hindurchgetrieben, dass die eine Kante desselben, welche die Schwingungsaxe A_2 abgeben sollte, dem Schwerpunkte von »Rumpf + Kopf« am nächsten lag. Darauf wurde ein zweiter ähnlicher Stahlstab parallel dem ersten so durch den Hals getrieben, dass die eine Kante desselben, welche die Schwingungsaxe A_1 abgeben sollte, ebenfalls dem Schwerpunkt am nächsten zu liegen kam, und dass der Schwerpunkt in der durch die parallelen Axen A_1, A_2 bestimmten Ebene lag.

Die für die Rechnung in Betracht kommenden Grössen der beiden Stahlstäbe waren folgende:

für den oberen Stahlstab mit der Axe A_1 (durch den Hals)

Gewicht	Länge der halben Querschnittsdiagonale
$\mu_1 = 720$ g	$\delta_1 = 0{,}75$ cm,

für den unteren Stahlstab mit der Axe A_2 (durch die Hüftgelenke)

$$\mu_2 = 560 \text{ g} \qquad \delta_2 = 0{,}75 \text{ cm}.$$

Die Entfernung der beiden Axen A_1, A_2 von einander betrug $\lambda = 48{,}75$ cm. Dabei gingen die Axen nicht, wie bei der ersten Versuchsreihe, durch die Gelenkmittelpunkte, sondern

die Axe A_1 verlief 7 cm senkrecht unter der Mitte des Atlanto-Occipitalgelenks,

und die Axe A_2 lag 1 cm senkrecht über der Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte.

Das Gewicht von Rumpf + Kopf betrug $m = 23\,790$ g.

200 einfache Pendelschwingungen um die Axe A_1 dauerten 131,0″.

200 einfache Pendelschwingungen um die Axe A_2 134,0″.

Daraus folgen für die beiden Schwingungsdauern τ_1, τ_2 die Werthe $\tau_1 = 0{,}655''$ und $\tau_2 = 0{,}670''$.

2) Schwingungen des Rumpfes ohne Kopf.

Der Kopf war in der Strangulationsfurche abgesägt worden. Der Stahlstab durch den Hals war etwas tiefer gesetzt worden als bei den Schwingungen von Rumpf + Kopf, da er sonst nicht mehr genügenden Halt gehabt und auch der Schwerpunkt des Rumpfes allein nicht mehr ganz genau in der Ebene der beiden Axen gelegen hätte. Es war infolge dessen die Entfernung beider Axen nur noch $\lambda = 48{,}1$ cm und der Abstand der Axe A_1 von der Mitte des Atlanto-Occipitalgelenks 7,65 cm. Die Länge der Axe A_2 und die Stäbe überhaupt waren dieselben geblieben.

Das Gewicht des Rumpfes allein betrug $m = 19910$ g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 123,4″.

200 Schwingungen um A_2 119,6″. Daraus ergeben sich für die Dauer einer Schwingung die Werthe $\tau_1 = 0{,}617''$ und $\tau_2 = 0{,}598''$.

3) Schwingungen des Kopfes.

Die beiden parallelen Axen liefen bei der Geradhaltung des Kopfes parallel der Verbindungslinie der Hüftgelenkmittelpunkte, und ihre Ebene enthielt (was bei allen Versuchen der Fall war, also nicht jedesmal von Neuem erwähnt sein möge) den Schwerpunkt des Körpertheils, d. h. hier des Kopfes allein.

Die obere Axe A_1 verlief dicht unter dem Scheitel, die untere A_2 2 cm senkrecht unter dem Atlanto-Occipitalgelenk. Die Entfernung beider betrug $\lambda = 16{,}6$ cm. Die beiden verwendeten Stahlstäbe waren dünner wie früher; die in Betracht kommenden Grössen hatten die Werthe

für den oberen Stahlstab mit der Axe A_1: $\mu_1 = 105$ g, $\delta_1 = 0{,}3$ cm,

für den unteren Stahlstab mit der Axe A_2: $\mu_2 = 140$ g, $\delta_2 = 0{,}4$ cm.

Das Gewicht des Kopfes betrug $m = 3880$ g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 77,8″.

200 Schwingungen um A_2 74,8″. Demnach waren $\tau_1 = 0{,}389''$ und $\tau_2 = 0{,}374''$.

4) Schwingungen der ganzen linken unteren Extremität.

Die obere Axe A_1 hatte die Richtung der Verbindungslinie der Hüftgelenkmittelpunkte bei gestreckter Stellung des Beins und stand daher senkrecht auf der Längsaxe desselben; sie verlief 0,6 cm

unter der Mitte des Schenkelkopfes. Die untere, ihr parallele Axe A_2 lag 2,5 cm über der Mitte des ersten Fussgelenks. Die Entfernung beider Axen betrug $\lambda = 70{,}1$ cm.

Für den oberen Stahlstab mit der Axe A_1 war $\mu_1 = 151$ g und $\delta_1 = 0{,}5$ cm, für den unteren $\mu_2 = 157$ g und $\delta_2 = 0{,}5$ cm.

Das Gewicht der Extremität betrug $m = 7640$ g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 145,2″.

200 Schwingungen um A_2 149,1″. Daher waren $\tau_1 = 0{,}726''$ und $\tau_2 = 0{,}7455''$.

5) Schwingungen des linken Oberschenkels.

Der Oberschenkel wurde durch Exarticulation im Kniegelenk abgelöst. Die beiden Axen waren parallel der Knieaxe gerichtet. Die obere A_1 war dieselbe wie A_1 bei Nr. 4, die untere A_2 lag 2,7 cm über der Knieaxe. Die Entfernung beider betrug $\lambda = 33{,}35$ cm.

Für den oberen Stahlstab mit der Axe A_1 war wie bei 4) $\mu_1 = 151$ g und $\delta_1 = 0{,}5$ cm, für den unteren $\mu_2 = 59$ g und $\delta_2 = 0{,}3$ cm.

Das Gewicht des Oberschenkels betrug $m = 4810$ g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 98,4″.

200 Schwingungen um A_2 101,8″, so dass also $\tau_1 = 0{,}492''$ und $\tau_2 = 0{,}509''$.

6) Schwingungen des Systems: linker Unterschenkel + Fuss.

Die Axen verliefen ebenfalls parallel der Knieaxe. Die untere A_2 war dieselbe wie A_2 bei Nr. 4, während die obere A_1 5,3 cm unter der Knieaxe lag; die Entfernung beider betrug $\lambda = 29{,}3$ cm. Für den oberen Stahlstab war $\mu_1 = 55{,}5$ g und $\delta_1 = 0{,}3$ cm, für den unteren wie bei 4) $\mu_2 = 157$ g und $\delta_2 = 0{,}5$ cm.

Das System wog $m = 2800$ g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 110,4″.

200 Schwingungen um A_2 110,9″, woraus folgt $\tau_1 = 0{,}552''$ und $\tau_2 = 0{,}5545''$.

7) Schwingungen des linken Unterschenkels.

Die beiden Axen waren dieselben wie bei Nr. 6 geblieben. Obgleich der Schwerpunkt des Unterschenkels allein etwas hinter der

Ebene durch A_1, A_2 liegt, da dieselbe nach Nr. 6 durch den Schwerpunkt von Unterschenkel + Fuss ging, so hat doch diese Fehlerquelle nur geringen Einfluss auf das Resultat, denn die Summe der Abstände des Schwerpunktes des Unterschenkels von den beiden Axen weicht nur wenig von der directen Entfernung der beiden Axen ab. Die Grösse λ ist aber auch die einzige, welche durch das Herausfallen des Schwerpunktes aus der Ebene der Axen A_1, A_2 verändert wird.

Der Unterschenkel wog 1890 g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 92,7″.

200 Schwingungen um A_2 97,5″, woraus folgt $\tau_1 = 0{,}4635''$ und $\tau_2 = 0{,}4875''$.

8) Schwingungen des linken Fusses.

Die obere Axe A_1 lief parallel der Axe des ersten Fussgelenks, 1 cm davon entfernt und zwar etwas nach vorn, so dass sie in die Ebene zwischen dem Schwerpunkte des Fusses und der Axe des ersten Fussgelenks zu liegen kam. Die untere Axe A_2 lag in derselben Ebene, lief parallel der ersten und hatte einen Abstand $\lambda = 7{,}55$ cm von derselben. Für den oberen Stahlstab war $\mu_1 = 56$ g und $\delta_1 = 0{,}3$ cm, für den unteren $\mu_2 = 74$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm.

Das Gewicht des Fusses betrug 910 g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 68,1″.

200 Schwingungen um A_2 89,4″, demnach war $\tau_1 = 0{,}3405''$ und $\tau_2 = 0{,}447''$.

9) Schwingungen des linken Oberschenkels um Axen parallel der Längsaxe.

Die beiden parallelen Axen besassen eine Entfernung $\lambda = 5.5$ cm von einander. Für den einen Stahlstab mit der Axe A_1 war $\mu_1 = 231{,}5$ g und $\delta_1 = 0{,}5$ cm, für den anderen mit der Axe A_2 $\mu_2 = 98{,}5$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm. Die durch die beiden Axen A_1, A_2 bestimmte Ebene enthielt den Schwerpunkt des Oberschenkels und daher auch (nach unseren früheren Untersuchungen über die Lage der Schwerpunkte am menschlichen Körper) mit grosser Annäherung die Längsaxe des Gliedes, d. h. die Verbindungslinie der Mitten der beiden das Glied begrenzenden Gelenke. Jeder der beiden

Stahlstäbe bestand in diesem Falle aus zwei Theilen, von denen der eine von der Hüftgelenkseite, der andere von der Kniegelenkseite aus eingetrieben war, und zwar so, dass der eine Theil, so genau wie es herzustellen war, die Verlängerung des anderen bildete. In gleicher Weise wurde bei allen den Schwingungsversuchen verfahren, bei denen die Axen parallel der Längsaxe des betreffenden Gliedes verliefen.

200 Schwingungen um die Axe A_1 dauerten 60,5″.

200 Schwingungen um die Axe A_2 118,2″, woraus sich ergibt $\tau_1 = 0{,}3025''$ und $\tau_2 = 0{,}591''$.

Bei diesen Schwingungen war immer nur der eine Stab im Glied befestigt.

10) Schwingungen des linken Unterschenkels um Axen parallel der Längsaxe.

Die beiden parallelen Axen waren $\lambda = 3{,}2$ cm von einander entfernt. Für den einen Stahlstab war $\mu_1 = 98{,}5$ g und $\delta_1 = 0{,}4$ cm, für den anderen $\mu_2 = 165{,}5$ g und $\delta_2 = 0{,}5$ cm. Die Ebene durch die beiden Axen A_1, A_2 enthielt ebenfalls wieder den Schwerpunkt des Unterschenkels und die durch ihn hindurchgehende Längsaxe desselben.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 49,8″,

200 Schwingungen um A_2 73,0″, folglich war $\tau_1 = 0{,}249''$ und $\tau_2 = 0{,}365''$.

Auch bei diesem Versuche war während des Schwingens nur der eine Stahlstab im Glied befestigt, welcher die Schwingungsaxe abgab.

11) Schwingungen des linken Fusses um verticale Axen.

Die beiden Axen liefen parallel der Längsaxe des Unterschenkels bei mittlerer Haltung des Fusses; ihre Entfernung betrug $\lambda = 9$ cm. Für den dem Unterschenkel näheren Stahlstab mit der Axe A_1 war $\mu_1 = 49{,}2$ g und $\delta_1 = 0{,}4$ cm, für den anderen mit der parallelen Axe A_2 $\mu_2 = 155{,}7$ g und $\delta_2 = 0{,}75$ cm. Auch hierbei lag natürlich wieder der Schwerpunkt des Fusses in der durch A_1, A_2 bestimmten Ebene.

200 Schwingungen um A_1 hatten eine Dauer von 70,0″.

200 Schwingungen um A_2 eine solche von 71,0″, so dass $\tau_1 = 0{,}350''$ und $\tau_2 = 0{,}355''$.

Bei diesem Versuche waren wieder, wie in allen den Fällen, wo das Gegentheil nicht ausdrücklich erwähnt worden ist, beide Stahlstäbe während des Schwingens im Glied.

12 Schwingungen der ganzen linken oberen Extremität.

Die obere Axe A_1 hatte die Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte von den beiden Humerusköpfen bei schlaff herabhängenden Armen und verlief daher senkrecht zu der Längsaxe des Oberarms; sie lag 1,8 cm unterhalb der Mitte des Humeruskopfes. Die untere Axe A_2 verlief parallel mit ihr zwischen dem vierten und fünften Metacarpusknochen. Der Abstand der beiden Axen, deren gemeinsame Ebene den Schwerpunkt des ganzen Armes enthielt, betrug $\lambda = 52{,}5$ cm.

Für den oberen Stahlstab war $\mu_1 = 80{,}2$ g und $\delta_1 = 0{,}5$ cm, für den unteren $\mu_2 = 49$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm.

Das Gewicht der ganzen Extremität betrug 2470 g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 123,9″.

200 Schwingungen um A_2 125,9″, so das $\tau_1 = 0{,}6195''$ und $\tau_2 = 0{,}6295''$.

13) Schwingungen des linken Oberarms.

Die obere Axe A_1 war eine andere wie A_1 bei Nr. 12; sie lief parallel der Ellbogenaxe, und zwar gerade durch die Mitte des Humeruskopfes. Die untere, zu ihr und daher auch zu der Ellbogenaxe parallele Axe A_2 lag 1 cm über der Axe des Ellbogengelenks. Die durch beide Axen bestimmte Ebene enthielt natürlich den Schwerpunkt des Oberarms allein. Die Entfernung beider Axen betrug $\lambda = 26{,}1$ cm. Für den oberen Stahlstab war $\mu_1 = 49$ g und $\delta_1 = 0{,}4$ cm, für den unteren $\mu_2 = 85$ g und $\delta_2 = 0{,}5$ cm.

Der Oberarm wog 1252 g.

200 Schwingungen um A_1 hatten eine Dauer von 86,1″,

200 Schwingungen um A_2 eine solche von 86,8″, folglich war $\tau_1 = 0{,}4305''$ und $\tau_2 = 0{,}434''$.

14) Schwingungen des Systems: linker Unterarm + Hand.

Die obere Axe A_1 lief parallel der Ellbogenaxe 3,5 cm unterhalb derselben, die untere A_2 ihr parallel in einer Entfernung von $\lambda = 26{,}0$ cm so, dass die Ebene durch A_1, A_2 den Schwerpunkt von »Unterarm + Hand« enthielt. Für den oberen Stahlstab war $\mu_1 = 54{,}7$ g und $\delta_1 = 0{,}4$ cm, für den unteren $\mu_2 = 49{,}2$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm.

Das System wog 1205 g.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 96,4″,

200 Schwingungen um A_2 96,0″; demnach ist $\tau_1 = 0{,}482''$ und $\tau_2 = 0{,}480''$.

15) Schwingungen des linken Oberarms um Axen parallel der Längsaxe.

Die beiden parallelen Axen, welche in ihrer Ebene den Schwerpunkt und die Längsaxe des Oberarms enthielten (vgl. Nr. 9), waren $\lambda = 4{,}0$ cm von einander entfernt. Für den einen Stahlstab war $\mu_1 = 38$ g und $\delta_1 = 0{,}3$ cm, für den anderen $\mu_2 = 78$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm. Auch hier bestand wie bei Nr. 9 jeder der beiden Stahlstäbe aus zwei Theilen, von denen jeder in die Verlängerung des anderen fiel.

200 Schwingungen um A_1 dauerten 47,4″,

200 Schwingungen um A_2 48,9″, woraus folgt $\tau_1 = 0{,}237''$ und $\tau_2 = 0{,}2445''$.

16) Schwingungen des Systems: linker Unterarm + Hand um Axen parallel der Längsaxe.

Die Entfernung der beiden parallelen Axen betrug $\lambda = 4{,}5$ cm. Für den einen Stahlstab war $\mu_1 = 165{,}2$ g und $\delta_1 = 0{,}5$ cm, für den anderen $\mu_2 = 104$ g und $\delta_2 = 0{,}4$ cm. Die Ebene durch die beiden Axen A_1, A_2 enthielt ebenfalls wieder den Schwerpunkt von »Unterarm + Hand« und die durch denselben hindurchgehende Längsaxe des Unterarms (bei mittlerer Stellung der Hand).

200 Schwingungen um A_1 dauerten 46,2″,

200 Schwingungen um A_2 47,6″; daraus ergeben sich die Werthe $\tau_1 = 0{,}231''$ und $\tau_2 = 0{,}238''$.

Darauf sind nun ganz die entsprechenden Schwingungsversuche für die rechten Extremitäten ausgeführt worden. Die darauf bezüglichen 13 Messungen entsprechen in ihrer Anordnung so genau den 13 von uns mit Nr. 4 bis Nr. 16 bezeichneten Schwingungsbeobachtungen, dass es nicht nöthig sein wird, auch noch das Protokoll für diese in derselben ausführlichen Weise zu geben, zumal in der folgenden Tabelle alle aus den Messungen hervorgegangenen Werthe für λ, μ_1, μ_2, δ_1, δ_2, τ_1 und τ_2 für alle von uns angestellten Schwingungen in übersichtlicher Weise zusammengestellt sind. Es soll nur darauf hingewiesen werden, dass bei den Schwingungen der ganzen rechten oberen Extremität der die Axe A_2 enthaltende Stahlstab nicht wie auf der linken Seite durch die Hand, sondern viel höher quer durch die Ulna getrieben war, weil derselbe in der Hand nicht mehr unverrückbar fest mit der ganzen Extremität verbunden gewesen wäre. Es befanden sich nämlich beim Versuche die in der Nähe des Handgelenks befindlichen Weichtheile nicht mehr in so hart gefrorenem Zustande, dass alle Beugungen im Handgelenk während des Schwingens mit Sicherheit ausgeschlossen waren, wenn der Stahlstab durch die Hand geschlagen worden wäre. Das Ellbogengelenk befand sich dagegen noch in genügend fest gefrorenem Zustande. Aus diesem Grunde ist λ bei diesem Versuche bedeutend kleiner als beim entsprechenden der linken Seite. Aus demselben Grunde ist auch die Entfernung der beiden Axen bei den Schwingungen des Systems »rechter Unterarm + Hand« um Axen parallel der Längsaxe kleiner als auf der linken Seite; damit in diesem Falle die beiden Stahlstäbe fest zum Glied gestellt waren, musste man sie zum Theil mit in dem Knochen befestigen.

In den folgenden beiden Tabellen finden sich nun die sämmtlichen für die Berechnung der Trägheitsmomente nöthigen Resultate der directen Messungen und Schwingungsbeobachtungen zusammengestellt.

Tabelle der für die Berechnung der Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen senkrecht zur Längsaxe der Glieder erforderlichen Grössen.

(II. Versuchsreihe.)

Körpertheile		m	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	λ	r_1	r_2
Rumpf + Kopf		23790	720,0	0,75	560,0	0,75	48,75	0,655	0,670
Rumpf		19910	720,0	0,75	560,0	0,75	48,1	0,617	0,598
Kopf		3880	105,0	0,3	140,0	0,4	16,6	0,389	0,374
Ganze untere Extremität	r	7840	155,5	0,5	139,0	0,5	70,9	0,728	0,7455
	l	7640	151,0	0,5	157,0	0,5	70,1	0,726	0,7455
Oberschenkel	r	4860	155,5	0,5	151,0	0,5	35,1	0,4995	0,513
	l	4810	151,0	0,5	59,0	0,3	33,35	0,492	0,509
Unterschenkel + Fuss	r	2980	144,5	0,5	139,0	0,5	31,2	0,560	0,5575
	l	2800	55,5	0,3	157,0	0,5	29,3	0,552	0,5545
Unterschenkel	r	2070	144,5	0,5	139,0	0,5	31,2	0,457	0,499
	l	1890	55,5	0,3	157,0	0,5	29,3	0,4635	0,4875
Fuss	r	910	54,7	0,4	80,2	0,5	10,1	0,3445	0,3425
	l	910	56,0	0,3	74,0	0,4	7,55	0,3405	0,447
Ganze obere Extremität	r	2360	85,0	0,5	54,7	0,4	38,1	0,6135	0,612
	l	2470	80,2	0,5	49,0	0,4	52,5	0,6195	0,6295
Oberarm	r	1243	55,7	0,3	80,5	0,5	25,0	0,4255	0,4345
	l	1252	49,0	0,4	85,0	0,5	26,1	0,4305	0,434
Unterarm + Hand	r	1117	49,5	0,4	54,8	0,4	25,2	0,467	0,465
	l	1205	54,7	0,4	49,2	0,4	26,0	0,482	0,480

(Für alle Massen ist als Einheit »Gramm«, für die Längen »Centimeter« und für die Zeiten »Secunde« genommen.)

Bei diesen Schwingungsbeobachtungen waren während des Schwingens immer beide Stahlstäbe im Glied befestigt, so dass also zur Berechnung der Schwerpunktsentfernungen ε_1, ε_2 und des Trägheitsradius z_0 die Formeln auf S. 34 u. 35 oben zur Anwendung kommen. Die in obiger Tabelle mit aufgezeichneten Messungen für den Fuss beziehen sich nicht auf Axen, welche senkrecht zur Längsaxe des Fusses verliefen, sondern auf Axen, welche bei mittlerer Stellung des Fusses zum Unterschenkel senkrecht zur Längsaxe des Unterschenkels gerichtet waren.

Tabelle der für die Berechnung der Trägheitsmomente in Bezug auf die Längsaxe der Glieder erforderlichen Grössen.

(II. Versuchsreihe.)

Körpertheile		m	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	λ	r_1	r_2
Oberschenkel	r	4860	114,7	0,5	219,2	0,5	5,1	0,403	0,305
	l	4810	231,5	0,5	98,5	0,4	5,5	0,3025	0,591
Unterschenkel	r	2070	114,7	0,5	112,4	0,4	4,4	0,250	0,2755
	l	1890	98,5	0,4	165,5	0,5	3,2	0,249	0,365
Fuss	r	940	49,2	0,4	80,3	0,5	9,2	0,353	0,3555
	l	940	49,2	0,4	155,7	0,75	9,0	0,350	0,355
Oberarm	r	1243	69,5	0,4	134,7	0,4	4,5	0,236	0,246
	l	1252	38,0	0,3	78,0	0,4	4,0	0,237	0,2445
Unterarm + Hand	r	1117	75,1	0,4	106,7	0,4	2,1	0,2775	0,2915
	l	1205	165,2	0,5	104,0	0,4	4,5	0,234	0,238

(Als Grundmasse sind wieder g, cm und sec genommen.)

Bei den in der vorhergehenden Tabelle mit untergebrachten Schwingungen des Fusses waren die beiden Axen nicht parallel der Längsaxe des Fusses, sondern sie verliefen parallel der Längsaxe des Unterschenkels bei mittlerer Stellung des Fusses zum Unterschenkel. Bei diesen Schwingungen des Fusses waren ebenfalls beide Stahlstäbe im Glied, so dass für dieselben auch die Formeln auf S. 34 u. 35 oben anzuwenden sind. Bei allen anderen Schwingungen, deren Resultate in der vorstehenden Tabelle niedergelegt sind, war dagegen immer nur der jeweilige Axenstab während des Schwingens im Glied befestigt. Daher sind für alle diese Schwingungen um Axen parallel der Längsaxe der Glieder die anderen Formeln auf S. 35 (unten) anzuwenden.

Als Werth der Schwerebeschleunigung g wurde bei allen Berechnungen der II. Versuchsreihe der genaue Werth für Leipzig, nämlich $g = 981{,}11$ verwendet.

Mit Hülfe der Formeln auf S. 34 u. 35 oben berechnet man nun aus den in der ersten dieser beiden Tabellen niedergelegten Grössen folgende Werthe[1]) der Abstände ε_1 und ε_2 des Schwerpunktes eines jeden Gliedes von den verwendeten Schwingungsaxen:

für		ε_1	ε_2
Rumpf + Kopf . . .		19,61	29,14
Rumpf		26,85	21,25
Kopf		10,53	6,07
Ganze untere Extremität	r:	32,74	38,16
	l:	31,82	38,28
Oberschenkel . . .	r:	15,72	19,38
	l:	15,30	18,05
Unterschenkel + Fuss	r:	—	—
	l:	16,64	12,66
Unterschenkel . . .	r:	11,43	19,77
	l:	11,00	18,30

1) Die zeitraubende Berechnung sowohl dieser Werthe, als auch der auf S. 48 u. 49 niedergelegten Werthe von ε_1 und ε_2, als endlich auch der in die Tabelle auf S. 50 eingetragenen Werthe von z_0 hat Herr Dr. Höcknер, Assistent am Bureau der Leipziger Stadtvermessung, die Güte gehabt, nach den Formeln auf S. 34 u. 35 mittelst einer Rechenmaschine für uns auszuführen.

		ε_1	ε_2
Fuss	r:	4,78	5,32
	l:	5,95	1,60
Ganze obere Extremität	r:	22,18	15,92
	l:	25,37	27,13
Oberarm	r:	11,37	13,63
	l:	12,31	13,79
Unterarm + Hand . .	r:	12,89	12,31
	l:	13,52	12,48

Für das System »rechter Unterschenkel + Fuss« war die Entfernung und Lage der beiden Schwingungsaxen zufälliger Weise eine solche gewesen, dass der Ausdruck $\pi^2\lambda - g\tau_1^2$ in der zweiten Formel einen sehr kleinen Werth erhielt, und dass in Folge dessen ein kleiner Fehler in den Grössen λ und τ_1 einen verhältnissmässig grossen Einfluss auf das Resultat ausübte. Aus diesem Grunde liessen sich die direct gemessenen Grössen nicht zur Berechnung der Schwerpunktsentfernungen und des Trägheitsradius verwenden. Es wird später gezeigt werden, wie man auf Umwegen trotzdem noch zu einem annähernd richtigen Werthe des Trägheitsradius in diesem Falle gelangt.

Es ist zu beachten, dass die Grössen ε_1 und ε_2 zunächst nur die für die weitere Rechnung nothwendigen Entfernungen des Schwerpunktes von den in gewissem Grade beliebig angebrachten Schwingungsaxen ausdrücken, nicht aber die Entfernungen des Schwerpunktes von den Mitten der das Glied begrenzenden Gelenke, da ja bei der zweiten Versuchsreihe die Axen im Allgemeinen nicht durch die Gelenkmittelpunkte hindurch gingen. Es kann daher aus den Werthen von ε_1 und ε_2 zunächst noch gar kein Schluss gezogen werden. Wenn dieselben in einigen Fällen für beide Körperseiten nahezu gleich gross sind, so ist das ausschliesslich als eine Folge der im Allgemeinen symmetrischen Anbringung der entsprechenden Axen für beide Körperseiten anzusehen.

Um die Entfernungen der Schwerpunkte von den Gelenkmitten, die wir wie in unserer Schwerpunktsarbeit mit e_1, e_2 bezeichnen wollen, zu erhalten, muss man zu den Grössen ε_1, ε_2 noch die jeweiligen Abstände a_1, a_2 der Axen A_1, A_2 von den ihnen benachbarten Gelenkmitten addiren. Diese Abstände sind bei jedem Versuch mit gemessen worden; dieselben hatten folgende Grössen:

für		a_1	a_2
Rumpf + Kopf		23,0	1,0
Rumpf		7,65	1,0
Kopf		1,4	— 2,0[1])
Ganze untere Extremität	r:	0	8,0
	l:	0,6	8,5
Oberschenkel	r:	0	0,8
	l:	0,6	2,7
Unterschenkel + Fuss	r:	4,7	8,0
	l:	5,3	8,5
Unterschenkel	r:	4,7	2,0
	l:	5,3	2,5
Fuss	r:	1,6	—
	l:	1,0	—
Ganze obere Extremität	r:	3,0	—
	l:	1,8	—
Oberarm	r:	0	0,5
	l:	0	1,0
Unterarm + Hand	r:	3,1	—
	l:	3,5	—

Die durch Addition der ε und a sich ergebenden Schwerpunktsentfernungen e sind in der Tabelle auf S. 50 mit eingetragen worden.

Aus den Schwingungen um Axen parallel der Längsaxe eines Gliedes erhält man unter Anwendung der Formeln auf S. 35 (mit Ausnahme der Schwingungen des Fusses, für welche die Formeln auf S. 34 u. 35 oben anzuwenden sind) folgende Werthe für die Entfernungen ε_1 und ε_2 der Schwingungsaxen von dem Schwerpunkt oder, was damit übereinstimmt, von der Längsaxe des Gliedes:

für		ε_1	ε_2
Oberschenkel	r:	1,39	3,71
	l:	4,90	0,60
Unterschenkel	r:	2,79	1,61
	l:	2,50	0,70

[1]) Dieser Abstand ist negativ zu rechnen, da die Axe A_2 bei den Schwingungen des Kopfes unter dem Atlanto-Occipitalgelenk lag.

		ε_1	ε_2
Fuss	r:	4,65	4,55
	l:	4,55	4,45
Oberarm	r:	2,72	1,78
	l:	2,23	1,77
Unterarm + Hand	r:	1,13	0,97
	l:	2,54	1,96

Auch diese Werthe haben für das betreffende Glied selbst gar keine Bedeutung, da die Lage der Schwingungsaxen ja zunächst ganz willkürlich war. Es war aber nöthig, dieselben zu berechnen, weil man erst durch sie in den Stand gesetzt ist, den Trägheitsradius in Bezug auf die Längsaxe des Gliedes abzuleiten.

Die Berechnung des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für Axen senkrecht zur Längsaxe des Gliedes, welche durch den Schwerpunkt hindurchgehen, geschieht nach den beiden sich controlirenden Formeln auf S. 35 oben. Nach denselben Formeln berechnet man auch die Trägheitsradien für die beiden durch den Schwerpunkt des Fusses gehenden Axen, von denen die eine senkrecht, die andere parallel der Richtung der Unterschenkelaxe läuft bei mittlerer Stellung des Fusses. Die Trägheitsradien für die Längsaxen der einzelnen Glieder werden dagegen nach den beiden sich controlirenden Formeln für $\varkappa_0$ auf S. 35 unten berechnet.

In folgender Tabelle sind die durch die Rechnung gewonnenen Werthe von $\varkappa_0$ zusammengestellt. Desgleichen finden sich die daraus resultirenden Werthe für das Trägheitsmoment $m\varkappa_0^2$ eingetragen. Endlich giebt die Tabelle auch die Entfernungen des Schwerpunktes von den Mitten der das Glied begrenzenden Gelenke, die daraus resultirende Länge eines jeden Gliedes, d. h. die Entfernung der beiden Gelenkmitten von einander, und der Vollständigkeit halber noch einmal die Masse jedes einzelnen Körpertheils. Trotzdem in den meisten Fällen nur die Trägheitsmomente für zwei Axen ein und desselben Gliederabschnittes abgeleitet worden sind, so sind damit doch alle Grössen in der Tabelle niedergelegt, welche den einzelnen Körpertheil im rein mechanischen Sinne charakterisiren, wie sich aus späteren Betrachtungen ergeben wird.

Die Massen, Schwerpunktslagen und Trägheitsmomente der einzelnen Körpertheile. (II. Versuchsreihe.)

Körpertheile	Masse m (in Gramm)	Länge l (in cm)	Entfernung des Schwerpunktes (in cm) c_1 (von oben)	c_2 (von unten)	Trägheitsradius z_0 und Trägheitsmoment $T = mz_0^2$ für Axen durch den Schwerpunkt: Axen senkrecht zur Längsaxe des Gliedes z_0 (in cm)	T (in cm²g)	Längsaxe des Gliedes selbst z_0 (in cm)	T (in cm²g)
Rumpf + Kopf	23790	72,75	42,64	30,14	21,08	10571500	—	—
Rumpf	19910	56,75 [1]	34,50	22,25	16,73	5574600	—	—
Kopf	3880	16,0 [2]	11,93	4,07	6,84	179940	—	—
Ganze untere Extremität r	7840	78,9	32,74	46,16	25,10	4939300	—	—
Ganze untere Extremität l	7640	79,2	32,42	46,78	25,08	4805600	—	—
Oberschenkel r	4860	35,9	15,72	20,18	11,04	589400	4,55	100640
Oberschenkel l	4840	36,65	15,90	20,75	11,43	628400	4,56	100020
Unterschenkel + Fuss r	2980	43,9	(24,77) [6]	(19,13) [6]	(14,41) [6]	(618555) [6]	—	—
Unterschenkel + Fuss l	2800	43,1	24,94	24,16	15,10	638400	—	—
Unterschenkel r	2070	37,9	16,13	21,77	9,16	173680	3,12	20150
Unterschenkel l	1890	37,1	16,30	20,80	9,66	176370	3,05	17580
Fuss r	910	Höhe 6,0 Länge 20,0 [3]	6,38	13,62	5,94	31785	6,21	35093
Fuss l	910	Höhe 6,0 Länge 20,0 [3]	6,95	13,05	5,97	32433	6,24	35433
Ganze obere Extremität r	2360	59,0	25,18	33,82	18,38	797300	—	—
Ganze obere Extremität l	2470	58,5	27,17	31,33	17,60	765100	—	—
Oberarm r	1243	25,5	11,37	14,13	7,95	78560	2,79	9680
Oberarm l	1252	27,1	12,31	14,79	7,79	75980	2,74	9400
Unterarm + Hand r	1117	36,0 [4]	15,99	20,01	10,43	121500	2,75	8450
Unterarm + Hand l	1205	35,5 [5]	17,02	18,48	11,24	152200	2,71	8850
Ganzer Körper	44057	150,5						

1) Länge des Rumpfes bedeutet hier die Entfernung zwischen der Mitte des Atlanto-Occipitalgelenks und der Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte.

2) Länge des Kopfes bedeutet die Entfernung vom Scheitel bis zur Mitte des Atlanto-Occipitalgelenks.

3) Länge des Fusses bedeutet die Entfernung der Fussspitze vom 1. Fussgelenk.

4) Davon sind 24 cm Unterarmlänge und 12 cm Entfernung des Handgelenks bis zum 1. Interphalangalgelenk.

5) Hiervon 25 cm Unterarmlänge, 10,5 cm Entfernung des Handgelenks bis zum 1. Interphalangalgelenk.

6) Diese vier Werthe sind nicht durch directe Messung gewonnen, sondern erst hinterher auf Umwegen (vgl. S. 52); sie machen infolgedessen nicht denselben Anspruch

Bevor weitere Schlüsse aus diesen Resultaten abgeleitet werden, soll eine Untersuchung der Fälle, in denen sowohl die Trägheitsmomente eines Gliedersystems als auch der einzelnen Theile desselben berechnet worden sind, zeigen, dass in der That diese zweite Versuchsreihe zu viel genaueren Resultaten geführt hat als die erste.

Bedeuten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Trägheitsradien zweier durch ein Gelenk verbundener Körpertheile in Bezug auf zwei unter sich und, wenn das Gelenk ein Charniergelenk ist, zur Gelenkaxe parallele Schwerpunkts-Axen, sind ferner m_1, m_2 die Massen und s_1, s_2 die Entfernungen der Schwerpunkte der beiden Theile von der Gelenkaxe, und bezeichnet man mit $\varkappa_0$ den Trägheitsradius für das aus beiden gebildete System in Bezug auf die parallele Axe durch den Gesammtschwerpunkt, so gilt zwischen diesen Grössen nach S. 30 die Relation

$$(m_1 + m_2)\varkappa_0^2 = m_1\varkappa_1^2 + m_2\varkappa_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\omega),$$

unter ω den Beugungswinkel verstanden.

Mit Ausnahme des Systems »Unterschenkel + Fuss« war während der Schwingungsversuche für alle von uns untersuchten Systeme der Beugungswinkel ω nahezu 180°, so dass (vgl. S. 30) die Relation übergeht in:

$$(m_1 + m_2)\varkappa_0^2 = m_1\varkappa_1^2 + m_2\varkappa_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(s_1 + s_2)^2.$$

Legt man in jedem Falle den Grössen m, s, $\varkappa$ des dem Rumpfe näheren Körperabschnittes den Index 1 und den anderen den Index 2 bei, so entspricht s_1 der in der Tabelle auf S. 50 mit e_2, und s_2 der mit e_1 bezeichneten Grösse für den betreffenden Körpertheil.

Man erhält dann durch Anwendung dieser Relation als Werth des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für

Rumpf + Kopf	21,09	während die directe Messung ergeben hatte:	21,08
Ganze untere Extremität l:	24,30		25,08
Ganze obere Extremität r:	17,63		18,38
Ganze obere Extremität l:	18.59		17,60

Für das System »Unterschenkel + Fuss« ist ω nicht 180°, sondern annähernd 120°, denn unter ω ist ja der Winkel zu verstehen, welcher von den beiden Verbindungslinien der Einzelschwerpunkte mit der Mitte des I. Fussgelenks gebildet wird.

Da $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, so geht in diesem Falle die allgemeine Relation über in:

$$(m_1 + m_2)\, z_0^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2).$$

Daraus erhält man für den Trägheitsradius z_0 vom

$$\text{Unterschenkel} + \text{Fuss} \begin{cases} \text{r:} & 14{,}41 \\ \text{l:} & 14{,}55\,, \end{cases}$$

während die directe Messung für die linke Seite den Werth 15,10, für die rechte dagegen, wie früher angegeben worden ist, gar keinen Werth ergeben hatte. Man kann nun diesen eben gefundenen Werth $z_0 = 14{,}41$ für den rechten »Unterschenkel + Fuss« in die Relation auf S. 51 unter gleichzeitiger Verwendung der durch directe Messung gewonnenen Werthe von z_0 für die ganze rechte untere Extremität und den rechten Oberschenkel einsetzen, um dadurch rückwärts den Werth für s_2, d. h. aber für die in der Tabelle mit e_1 bezeichnete Grösse (Entfernung des Schwerpunktes des rechten »Unterschenkels + Fuss« von der Kniegelenkmitte) zu gewinnen. Man erhält auf diese Weise $s_2 = e_1 = 24{,}77$ und, da $\lambda = 43{,}9$, hieraus $e_2 = 19{,}13$. Unter Benutzung des gefundenen Werthes von z ergiebt sich endlich für das Trägheitsmoment selbst der Werth 618555. Diese vier Werthe sind in die Tabelle auf S. 50 mit eingetragen worden.

Vergleicht man die auf S. 51 angegebenen aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Theile berechneten Werthe des Trägheitsradius mit den durch die directe Messung der Schwingungsdauern des Gliedersystems gefundenen, so geht aus den verhältnissmässig geringen Abweichungen deutlich hervor, dass nicht nur die Resultate der zweiten Versuchsreihe viel genauer sind als die der ersten, sondern dass man mit denselben zugleich wohl die überhaupt erreichbare und auf irgend welche Bedeutung Anspruch habende Genauigkeit gewonnen hat. Denn es ist immer zu beachten, dass die Annahmen $\omega = 180°$ in den zuerst und $\omega = 120°$ in den zuletzt angeführten Fällen nur approximative Gültigkeit besitzen.

Dass aber die Genauigkeit nicht etwa schon übertrieben ist, geht wohl andrerseits deutlich aus dem Umstande hervor, dass die Werthe des Trägheitsradius für denselben Körpertheil auf beiden Seiten im Maximum nur um wenige Millimeter, in vielen Fällen,

wie z. B. bei den ganzen unteren Extremitäten, den Füssen und bei allen Trägheitsmomenten in Bezug auf die Längsaxe des Gliedes, überhaupt nur um Zehntel-Millimeter von einander differiren.

Berücksichtigt man, dass in der Art des Abtrennens der Glieder von einander eine nicht zu vermeidende Fehlerquelle liegt, dass wohl in keinem Falle die Trennung entsprechender Glieder auf beiden Seiten vollständig gleichmässig geschehen ist, dass aber trotz dieser anscheinend beträchtlichen Fehlerquelle die Grössen der Trägheitsradien für entsprechende Glieder beider Seiten so genau übereinstimmen, so erkennt man, dass der Trägheitsradius eine Grösse ist, welche bei verhältnissmässig grossen Schwankungen in der Anordnung der Massentheilchen nur sehr geringen Veränderungen unterworfen ist. Man entnimmt daraus die beruhigende Zuversicht, dass die Veränderungen, welche die Lagerung der Massentheilchen in Folge des Blutstromes und der Muskelcontraction im Leben erleidet, nur geringen Einfluss auf die Grösse des Trägheitsradius für einen jeden Gliederabschnitt ausüben werden.

Ein ganz ähnliches Verhalten hatten wir seiner Zeit für die Lage des Schwerpunktes eines einzelnen Gliederabschnittes gefunden. Nicht nur für dieselben Gliederabschnitte von beiden Seiten eines Individuums, sondern für alle entsprechenden Körpertheile, sowohl der von uns als auch der von Harless untersuchten Individuen, ergab sich mit grosser Annäherung Uebereinstimmung in der Schwerpunktslage. Die Schwankungen, welche der Schwerpunkt eines Gliederabschnittes in Folge der im Leben stattfindenden Verschiebung der einzelnen Massentheilchen z. B. bei der Muskelcontraction und dem Blutstrom erleidet, sind, obgleich man sie nachweisen kann, doch nicht so gross, als dass sie auf die Lage des Schwerpunktes einen Einfluss ausübten, welchen man berücksichtigen müsste, wenn es sich um die Bewegung der durch die grösseren Gelenke abgetheilten Gliederabschnitte handelt. Jedenfalls sind die individuellen Schwankungen der Schwerpunktslage, trotzdem sie sich nach unseren Messungen als nur gering herausgestellt hatten, immer noch grösser als die durch den Blutstrom, die Muskelcontraction u. s. w. hervorgerufenen.

Man kann daher die Masse, die Lage des Schwerpunktes und die Trägheitsmomente für den Kopf, Oberschenkel, Unterschenkel,

Fuss, Oberarm, Unterarm, ja selbst mit grosser Annäherung für die Hand und den Rumpf als constante Grössen betrachten. Durch diese Grössen ist aber das Verhalten eines jeden Körpers gegenüber bewegenden Kräften bestimmt, mag die Gestalt desselben sein wie sie wolle. Man kann also die genannten Körpertheile im rein mechanischen Sinne, d. h. in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber bewegenden Kräften, als gegebene, unveränderliche Massen ansehen. Damit gewinnt aber überhaupt erst die Aufgabe einer Mechanik des menschlichen Körpers im Ganzen eine mathematisch und physikalisch greifbare Gestalt. Man hat es dann mit der Untersuchung der mechanischen Verhältnisse in einem Complex von starren Massen zu thun, dessen einzelne Theile in bestimmter Weise durch Gelenke mit einander verbunden und nicht bloss äusseren Kräften, sondern vor allen Dingen auch inneren Kräften unterworfen sind, welche eine Veränderung der gegenseitigen Stellung der Theile zu einander hervorrufen können. Hat man diese Aufgabe vollständig gelöst, so kann man dann die gemachte Annahme absoluter Constanz der Theile wieder fallen lassen und untersuchen, in welcher Weise die Veränderungen in den einzelnen Theilen, z. B. die Bewegungen der Finger und Fingerglieder, die Bewegungen des ganzen Körpers beeinflussen.

Berechnet man für die Axen senkrecht zur Längsaxe eines Gliedes wieder das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius z_0 und der Länge l eines jeden Körpertheils, so ergeben sich aus den Zahlen der sechsten und dritten Spalte der Tabelle auf S. 50 folgende Werthe:

für	$\frac{z_0}{l}$
Rumpf + Kopf	0,29
Rumpf	0,29
Kopf	0,43
Ganze untere Extremität	r: 0,32
	l: 0,32
Oberschenkel	r: 0,31
	l: 0,31
Unterschenkel + Fuss .	r: 0,33
	l: 0,35

für		$\frac{z_0}{l}$
Unterschenkel	r:	0,24
	l:	0,26
Fuss	r:	0,30
	l:	0,30
Ganze obere Extremität	r:	0,31
	l:	0,30
Oberarm	r:	0,31
	l:	0,29
Unterarm + Hand . .	r:	0,29
	l:	0,32

Unserem Princip gemäss haben wir dabei als Länge des Kopfes den Abstand des Scheitels von der Mitte des Atlanto-Occipitalgelenkes verwendet. Nimmt man als Länge des Kopfes die Entfernung des Scheitels vom Kinn, welche bei unserem Individuum ca. 22 cm betrug, so erhält man beim Kopf für $\frac{z_0}{l}$ den Werth 0,31.

Daraus geht aber hervor, dass wieder, wie bei der ersten Versuchsreihe, dieses Verhältniss für alle Körpertheile nahezu denselben Werth besitzt. Das Mittel aus allen Verhältnisszahlen ist 0,30. Das Mittel aus denen der ersten Versuchsreihe hatte nahezu denselben Werth, nämlich 0,28.

Man hat daher den Satz:

»Bei allen Gliedern des menschlichen Körpers ist das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf irgend eine zur Längsaxe senkrechte Axe durch den Schwerpunkt und zwischen der Länge des Gliedes dasselbe, und zwar besitzt es nahezu den constanten Werth 0,30.«

Dabei ist (mit Ausnahme des Kopfes) unter der Länge eines Gliedes der Abstand der Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke zu verstehen.

Für die Trägheitsradien in Bezug auf die Längsaxe der Glieder selbst lässt sich eine ähnliche Beziehung zur Länge des Gliedes nicht finden, wohl aber zur mittleren Dicke desselben, wenigstens für die bis jetzt von uns untersuchten Fälle.

Wir hatten nun zwar verabsäumt, an unseren zu den Versuchen verwendeten Cadavern die durchschnittliche Dicke der Glieder zu messen. Man wird jedoch annehmen können, dass bei zwei gleichmässig gebauten Körpern ohne abnormen Ansatz von Fett das Verhältniss der durchschnittlichen Dicke eines einzelnen Gliedes zur Länge desselben annähernd ein constantes ist. Wir hatten in unserer früheren Arbeit über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers an einem ebenfalls normal gebauten Individuum ohne abnormen Fettansatz die Glieder durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe zersägt und diese Durchschnitte für den einen Cadaver auf Tafel I und II jener Arbeit in der halben natürlichen Grösse beigegeben.

Der mittlere Durchmesser des Schnittes durch den Oberschenkel (Tafel II, 6) beträgt 14,2 cm, der mittlere Durchmesser des Schnittes durch den Oberarm (Tafel I, 1) 9,3 cm. Da die beiden Schnitte in der Höhe des Schwerpunktes geführt sind, so wird man diese Durchmesser gleichzeitig als mittlere Dicken des Gliedes ansehen können. Für den Unterschenkel wird das in Folge der eigenthümlichen Gestalt desselben nicht zutreffen; wir haben in diesem Falle das Mittel genommen aus den beiden mittleren Durchmessern der Schnitte 8 (durch den Schwerpunkt des Unterschenkels allein) und 9 (durch den Schwerpunkt des »Unterschenkels + Fuss«); dasselbe beträgt 9,8 cm. Da für den betreffenden Körper die Länge des Oberschenkels 40,0 cm, die des Unterschenkels 41,5 cm und die des Oberarms 32,0 cm betrug, so hat man in diesem Falle als Verhältnisszahlen der mittleren Dicke des Gliedes zur Länge desselben für den

Oberschenkel . 0,355
Unterschenkel 0,235
Oberarm . . 0,29.

Für den Cadaver unserer jetzigen zweiten Versuchsreihe betrug nach der Tabelle auf S. 50 die

Länge des Oberschenkels { r: 35,9 cm; l: 36,65 »
» » Unterschenkels { r: 37,9 »; l: 37,1 »
» » Oberarms . . { r: 25,5 »; l: 27,1 »

Daraus erhält man durch Multiplication mit den angegebenen Verhältnisszahlen für die mittlere Dicke dieser Glieder die allerdings nur approximativ gültigen Werthe:

		d	
mittlere Dicke des Oberschenkels	r:	12,75	cm
	l:	13,0	»
» » » Unterschenkels	r:	8,9	»
	l:	8,7	»
» » Oberarms . .	r:	7,4	»
	l:	7,9	»

Der Trägheitsradius in Bezug auf die Längsaxe des Gliedes besitzt nach der Tabelle auf S. 50 die Werthe für den

		$\varkappa_0$	
Oberschenkel . .	r:	4,55	cm
	l:	4,56	»
Unterschenkel . .	r:	3,12	»
	l:	3,05	»
Oberarm . . .	r:	2,79	»
	l:	2,74	»

Aus diesen beiden letzten Angaben erhält man aber als Werthe des Verhältnisses des Trägheitsradius $\varkappa_0$ für die Längsaxe zur mittleren Dicke d für den

		$\frac{\varkappa_0}{d}$
Oberschenkel . .	r:	0,36
	l:	0,35
Unterschenkel . .	r:	0,35
	l:	0,35
Oberarm	r:	0,38
	l:	0,35

Obgleich eine gewisse Willkürlichkeit in der Annahme liegt, dass bei den beiden Cadavern (Cadaver IV der Untersuchung über den Schwerpunkt und Cadaver II unserer jetzigen Versuchsreihen) das

Verhältniss zwischen der mittleren Dicke und der Länge der Extremitätenabschnitte dasselbe ist, so stellt sich doch eine überraschende Constanz des Verhältnisses zwischen Trägheitsradius und mittlerer Dicke heraus, nämlich in den meisten Fällen der Werth 0,35. Leider ist es nicht möglich gewesen, auch den Trägheitsradius des Unterarms allein für dessen Längsaxe zu bestimmen. Es steht aber zu erwarten, was bei Gelegenheit noch untersucht werden soll, dass sich auch für den Unterarm in Folge seiner Gestalt dasselbe Verhältniss herausstellt. Das gefundene Resultat kann man in den Satz zusammenfassen:

»Beim Oberschenkel, Unterschenkel, Oberarm (und voraussichtlich auch beim Unterarm) ist das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf die Längsaxe und zwischen der mittleren Dicke des Gliedes dasselbe und besitzt annähernd den constanten Werth 0,35.«

Durch diesen Satz in Verbindung mit dem entsprechenden Satz auf S. 55 ist man nun in die Lage versetzt, am lebenden Menschen annähernd die Grössen der Trägheitsradien und Trägheitsmomente eines jeden Gliedes für alle Axen senkrecht zur Längsaxe und für die Längsaxe selbst abzuleiten. Man hat zu diesem Zwecke nur die Längen und die mittleren Dicken der Glieder zu messen. Bezeichnet l die Länge, d die mittlere Dicke, $\varkappa_0'$ den Trägheitsradius für eine Axe senkrecht zur Längsaxe und $\varkappa_0''$ den Trägheitsradius für die Längsaxe selbst so ist dann annähernd

$$\varkappa_0' = 0{,}3 \cdot l \text{ und } \varkappa_0'' = 0{,}35 \cdot d .$$

Um das Trägheitsmoment selbst abzuleiten, braucht man noch die Masse eines jeden Gliedes. In der Tabelle auf S. 50 finden sich die Massen für das Individuum unserer zweiten Versuchsreihe aufgezeichnet. Berechnet man in jedem Falle das Verhältniss μ der Masse des Körpertheils zur Gesammtmasse des Körpers, so erhält man die Werthe:

für		μ		μ
Kopf		0,088	oder	0,088
Rumpf		0,452		0,452
Oberschenkel	r:	0,110	im Mittel:	0,110
	l:	0,109		
Unterschenkel	r:	0,047		0,045
	l:	0,043		
Fuss	r:	0,021		0,021
	l:	0,021		
Oberarm	r:	0,028		0,028
	l:	0,029		
Unterarm + Hand	r:	0,027		0,026
	l:	0,025		
	Summe:	1,000		

Bezeichnet man die am Lebenden bestimmbare Gesammtmasse des Körpers mit M, dann ist die Masse m jedes einzelnen Gliedes für einen ähnlich gebauten Körper

$$m = \mu \cdot M,$$

das Trägheitsmoment T' für eine Axe durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe des Gliedes

$$T' = 0{,}09\ \mu M l^2$$

und das Trägheitsmoment T'' für die Längsaxe des Gliedes

$$T'' = 0{,}1225\ \mu M d^2.$$

Dabei ist μ aus der obigen Tabelle zu entnehmen, während die Grössen M, l und d am Lebenden direct gemessen werden können.

Ableitung der Trägheitsmomente für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt.

Obgleich an jedem Glied nur der Trägheitsradius für die Längsaxe und für eine Axe durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe bestimmt worden sind, so ist man dadurch doch in die Lage versetzt, den Trägheitsradius und das Trägheitsmoment für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt und in Folge dessen für jede beliebige Axe des Raumes überhaupt anzugeben.

Die erste Versuchsreihe hatte ergeben, dass die Trägheitsmomente für vier von einander verschiedene Axen durch den Schwerpunkt in der zur Längsaxe des Gliedes senkrechten Ebene, nicht nur beim Oberschenkel und Oberarm, sondern sogar bei der ganzen unteren und der ganzen oberen Extremität (vgl. S. 25), und daher auch beim Unterschenkel und Unterarm mit grosser Annäherung einander gleich sind.

Die allgemeine Theorie der Trägheitsmomente lehrt nun, dass schon, wenn die Trägheitsmomente in Bezug auf drei in einer Ebene liegende und durch denselben Punkt O hindurchgehende Axen gleich gross sind, dies für alle Trägheitsmomente in Bezug auf die in dieser Ebene liegenden Axen durch den Punkt O gilt (vgl. S. 67 u. 68.) Sie lehrt weiter, dass, wenn gleichzeitig das Trägheitsmoment für die zu jener Ebene senkrechte Axe durch den Punkt O unter allen Trägheitsmomenten für die Axen durch den Punkt O den grössten oder kleinsten Werth besitzt, dann auch alle Trägheitsmomente einander gleich sind, deren Axen mit der Senkrechten zu jener Ebene denselben Winkel bilden. Bezeichnet z' den Trägheitsradius in Bezug auf irgend eine in jener Ebene liegende Axe durch den Punkt O, z'' den in Bezug auf die Senkrechte zu dieser Ebene durch O, so ergiebt sich für den Trägheitsradius z in Bezug auf irgend eine andere Axe durch O, welche mit der Senkrechten den Winkel γ bildet:

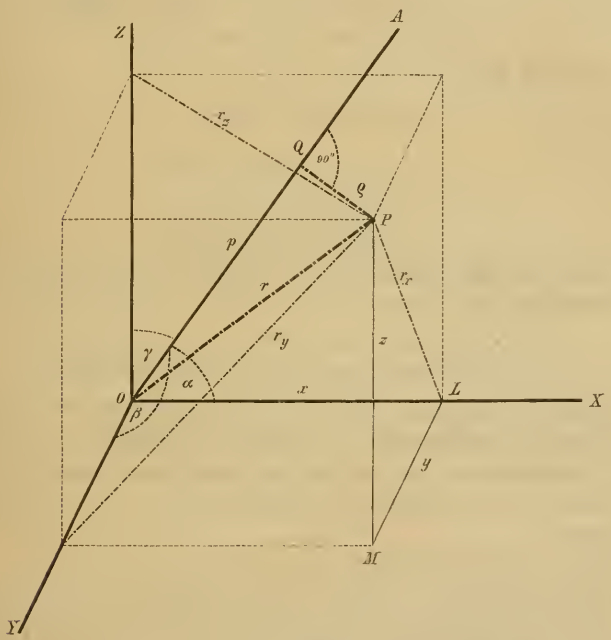
$$z = \sqrt{z'^2 \cdot \sin^2\gamma + z''^2 \cdot \cos^2\gamma}.$$

Zu diesem Resultat gelangt man auf folgende Weise:

In Figur 6 sei O der Anfangspunkt eines mit dem Körper fest verbundenen Coordinatensystems mit den Axen OX, OY, OZ.

OA sei irgend eine Gerade durch den Coordinatenanfangspunkt, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet.

Es seien ferner x, y, z die Coordinaten eines Massenpunktes P mit der Masse m und PQ das Loth von P auf die Gerade OA; dann wird durch die drei Punkte O, P und Q ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt, dessen Hypotenuse $OP = r$ und dessen Katheten $PQ = \varrho$



Figur 6.

und $OQ = p$ sein mögen. Nun ist OQ die Projection der Strecke OP auf OA; diese Projection ist aber gleich der Projection des gebrochenen Linienzuges $OLMP$ auf OA. Da letzterer sich aus den Strecken $OL = x$, $LM = y$ und $MP = z$ zusammensetzt, welche mit OA bezüglich die Winkel α, β, γ bilden, so ist also die Projection $OQ = p$ zusammengesetzt aus den drei Projectionen $x\cos\alpha$. $y\cos\beta$ und $z\cos\gamma$, d. h. es ist

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Da ferner $OP = r$ sich durch die drei Coordinaten ausdrückt vermöge der Beziehung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

$$\varrho^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

oder

$$\varrho^2 = x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma) - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Aus der Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

folgt ferner

$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$
$$1 - \cos^2\beta = \cos^2\gamma + \cos^2\alpha$$
$$1 - \cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta.$$

Setzt man diese Werthe ein, so ergiebt sich bei geeigneter Zusammenfassung der Glieder:

$$\varrho^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Beachtet man nun, dass $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$ und $x^2 + y^2$ die Quadrate der Entfernungen r_x, r_y und r_z des Punktes P von den drei Coordinatenaxen sind und fügt auf beiden Seiten dieser Relation die Masse m des Punktes P als Factor hinzu, so erhält man schliesslich:

$$m\varrho^2 = mr_x^2 \cdot \cos^2\alpha + mr_y^2 \cdot \cos^2\beta + mr_z^2 \cdot \cos^2\gamma - 2myz \cdot \cos\beta\cos\gamma - 2mzx \cdot \cos\gamma\cos\alpha - 2mxy \cdot \cos\alpha\cos\beta.$$

Da ϱ die Entfernung des Punktes P von der Geraden OA war, so drückt $m\varrho^2$ das Trägheitsmoment des Massenpunktes P in Bezug auf die Gerade OA als Axe aus; ferner bedeuten mr_x^2, mr_y^2 und mr_z^2 die Trägheitsmomente dieses Punktes in Bezug auf die drei zum Körper festen Coordinatenaxen. Die Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ sind von der Lage des Punktes P unabhängig und behalten für jeden beliebigen anderen Massenpunkt ihre Werthe bei. Summirt man daher über alle Massenpunkte des Körpers, so kann man die Grössen $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$, $2\cos\beta\cos\gamma$, $2\cos\gamma\cos\alpha$ und $2\cos\alpha\cos\beta$ als constante Factoren aus den einzelnen Summen heraussetzen und erhält:

$$\Sigma' m\varrho^2 = \cos^2\alpha\,\Sigma' m r_x^2 + \cos^2\beta\,\Sigma' m r_y^2 + \cos^2\gamma\,\Sigma' m r_z^2$$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma' myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\,\Sigma' mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\,\Sigma' mxy\,.$$

Nun ist $\Sigma' m\varrho^2$ das Trägheitsmoment T des ganzen Körpers in Bezug auf die Axe OA, ferner sind $\Sigma' m r_x^2$, $\Sigma' m r_y^2$ und $\Sigma' m r_z^2$ die Trägheitsmomente des ganzen Körpers in Bezug auf die drei Coordinatenaxen. Da das Coordinatensystem zum Körper fest angenommen wurde, so sind diese drei letzteren Trägheitsmomente von der Lage der Axe OA unabhängig und bleiben dieselben, so lange das Coordinatensystem im Körper nicht verändert wird. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe OA dagegen hängt von der Richtung dieser Axe ab und ist, wie auch aus der Relation zu ersehen ist, eine Function der drei Winkel α, β, γ.

$\Sigma' myz$, $\Sigma' mzx$ und $\Sigma' mxy$ sind drei Grössen, welche dagegen wieder von der Lage der Axe OA unabhängig sind und für jedes zum Körper fest angenommene Coordinatensystem einen constanten Werth besitzen. Nach Rankine nennt man dieselben die Deviationsmomente des Körpers in Bezug auf die drei Coordinatenaxen.

Bezeichnet man die drei constanten Trägheitsmomente mit A, B, C und die drei constanten Deviationsmomente mit D, E, F, so geht obige Relation für das Trägheitsmoment T in Bezug auf die Axe OA über in:

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha$$
$$- 2F\cos\alpha\cos\beta\,.$$

Daraus geht also hervor, dass zur Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Körpers für alle durch einen Punkt O hindurchgehenden Axen die Kenntniss sowohl der drei Trägheitsmomente als auch der drei Deviationsmomente für die Axen eines zum Körper festen, im Uebrigen aber ganz beliebig gelegenen rechtwinkligen Coordinatensystems mit dem Anfangspunkt O erforderlich ist.

Es lässt sich nun zeigen, dass bei geeigneter Orientirung des zum Körper festen Coordinatensystems die Aufgabe sich wesentlich vereinfacht. Für eine bestimmte Lage des Coordinatensystems erhalten nämlich die drei Deviationsmomente den Werth 0, so dass zur Bestimmung eines beliebigen Trägheitsmomentes T nur noch die Kenntniss der Werthe der drei Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen dieses ausgezeichneten Coordinatensystems nöthig ist.

Dieses Resultat lässt sich in sehr anschaulicher Weise ableiten, wenn man eine geometrische Interpretation der obigen Relation für T verwendet, welche zuerst von Cauchy angegeben und deren wichtige Bedeutung für die Mechanik von Poinsot erkannt worden ist.

Dividirt man nämlich beide Seiten der Relation durch das Trägheitsmoment T, so ergiebt sich

$$1 = A\frac{\cos^2\alpha}{T} + B\frac{\cos^2\beta}{T} + C\frac{\cos^2\gamma}{T} - 2D\frac{\cos\beta\cos\gamma}{T} - 2E\frac{\cos\gamma\cos\alpha}{T} - 2F\frac{\cos\alpha\cos\beta}{T}.$$

Denkt man sich nun auf der Axe OA von O aus eine Strecke abgetragen, deren Länge numerisch gleich dem Werthe von $\frac{1}{\sqrt{T}}$ ist, so sind die drei Coordinaten x, y, z des Endpunktes dieser Strecke

$$x = \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\alpha, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\beta, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\gamma,$$

denn OA bildet ja mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ.

Dann ist aber

$$\frac{\cos^2\alpha}{T} = x^2, \qquad \frac{\cos^2\beta}{T} = y^2, \qquad \frac{\cos^2\gamma}{T} = z^2,$$

$$\frac{\cos\beta\cos\gamma}{T} = yz, \qquad \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{T} = zx, \qquad \frac{\cos\alpha\cos\beta}{T} = xy,$$

und es geht die obige Relation über in

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy.$$

Diese Relation zwischen den Coordinaten x, y, z des Endpunktes der auf der Axe OA abgetragenen Strecke von der Länge $\frac{1}{\sqrt{T}}$ besteht aber für jede beliebige Richtung der Axe OA. Fasst man nun x, y, z als variabele Punktcoordinaten auf, so stellt diese Relation die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung dar, d. h. aber die Endpunkte aller Strecken von der Grösse $\frac{1}{\sqrt{T}}$, welche auf den zugehörigen Axen von O aus abgetragen sind, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Die drei Coordinaten x, y, z können nun für keinen Punkt der Fläche unendlich gross werden, denn dazu

wäre nöthig, dass T den Werth 0 annähme, was nur möglich ist, wenn der ganze Körper sich auf eine gerade Linie oder einen einzigen Punkt reducirt. Da dieser Fall selbstverständlich für uns ausgeschlossen ist, so können keine Punkte der Fläche ins Unendliche fallen, d. h. aber die Fläche zweiter Ordnung muss nothwendiger Weise ein Ellipsoid[1]) sein, denn dies ist die einzige Fläche zweiter Ordnung, welche überall im Endlichen verläuft. Der Mittelpunkt dieses im Allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids fällt mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammen.

Man hat also den Satz:

Denkt man sich auf allen Strahlen, welche von einem festen Punkte O eines Körpers ausgehen, von O aus Strecken abgetragen, welche den reciproken Werthen der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf jeden Strahl als Axe numerisch gleich sind, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken auf einem Ellipsoid. Man nennt dasselbe das Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt O. Ist insbesondere der Punkt O der Schwerpunkt des Körpers, so führt es den Namen Centralträgheitsellipsoid des Körpers.

Diese geometrische Interpretation der Trägheitsmomente für die Axen eines Punktes verleiht nicht nur der Grössenvertheilung der Trägheitsmomente eines Körpers einen hohen Grad von Anschaulichkeit, sondern sie erledigt zugleich die ganze Theorie der Vertheilung der Trägheitsmomente im Körper, indem die letztere auf diese Weise an eine vollständig ausgebildete und durchgearbeitete geometrische Theorie, nämlich die Theorie der Flächen zweiter Ordnung angeschlossen worden ist. Jeder Satz über die Halbaxen des Ellipsoids liefert zugleich einen Satz über die Trägheitsmomente. So sind z. B. unter allen Halbaxen des Ellipsoids drei auf einander senkrecht stehende dadurch ausgezeichnet, dass die Grösse der einen ein Maximum, die einer zweiten ein Minimum ist, während die dritte

1) Ein Ellipsoid ist eine geschlossene Fläche, die die Eigenschaft besitzt, dass alle ebenen Schnittcurven derselben Ellipsen sind, welche in einigen Fällen in Kreise übergehen. Die Oberfläche eines Eies würde z. B. ein Ellipsoid darstellen, wenn der Längsquerschnitt desselben eine genaue Ellipse wäre, und zwar wäre es dann nicht ein allgemeines, dreiaxiges Ellipsoid, sondern ein Rotationsellipsoid.

einen mittleren Werth besitzt. Diese drei Halbaxen nennt man die Hauptaxen des Ellipsoids. Dementsprechend werden unter allen durch einen Punkt O gehenden Geraden drei auf einander senkrecht stehende dadurch ausgezeichnet sein, dass von den drei zu ihnen gehörenden Trägheitsmomenten das eine ein Minimum, ein zweites ein Maximum wird, während das dritte einen mittleren Werth besitzt. Diese drei Geraden nennt man die Hauptträgheitsaxen des Punktes O. Bezieht man die Gleichung des Ellipsoids auf die drei Hauptaxen desselben als Coordinatenaxen, so nimmt sie die einfache Gestalt an

$$1 = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 ,$$

wo A', B', C', welche natürlich von A, B, C verschieden sind, für das neue Coordinatensystem constante Werthe besitzen. Daraus geht aber hervor, dass, wenn man die Hauptaxen des Trägheitsellipsoids oder, was dasselbe, die Hauptträgheitsaxen für den Punkt O als Coordinatenaxen wählt, die Relation zur Bestimmung von T die einfache Gestalt annimmt

$$T = A' \cos^2\alpha + B' \cos^2\beta + C' \cos^2\gamma ,$$

wo A', B', C' die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Hauptträgheitsaxen des Punktes O sind. Die drei letzten Glieder sind ganz aus der Relation herausgefallen, das heisst aber, die drei Deviationsmomente für die Hauptträgheitsaxen nehmen den Werth 0 an. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Hauptträgheitsaxen nennt man die Hauptträgheitsmomente und ihre Radien die Hauptträgheitsradien des Punktes O.

Bezeichnet man die drei Hauptträgheitsradien mit z_x, z_y, z_z, den Trägheitsradius für die beliebige Axe OA mit z und die Gesammtmasse des Körpers mit M, so dass also

$$T = Mz^2 , \quad A' = Mz_x^2 , \quad B' = Mz_y^2 \text{ und } C' = Mz_z^2 ,$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe und gleichzeitiger Division mit M aus der oben stehenden Relation

$$z^2 = z_x^2 \cdot \cos^2\alpha + z_y^2 \cdot \cos^2\beta + z_z^2 \cdot \cos^2\gamma .$$

Es sind also zur Bestimmung des Trägheitsmomentes und Trägheitsradius für eine beliebige Axe durch den Punkt O nur drei Bestimmungsstücke erforderlich, nämlich die drei Hauptträgheitsmomente resp. Hauptträgheitsradien für den Punkt O.

Sind insbesondere zwei von den drei Hauptträgheitsradien einander gleich, etwa $\varkappa_y = \varkappa_x$, so geht die Relation über in

$$\varkappa^2 = \varkappa_x^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + \varkappa_z^2 \cos^2\gamma$$

oder, da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$ ist:

$$\varkappa^2 = \varkappa_x^2 \cdot \sin^2\gamma + \varkappa_z^2 \cdot \cos^2\gamma .$$

Das zugehörige Trägheitsellipsoid ist in diesem Falle in ein Rotationsellipsoid übergegangen, dessen Rotationsaxe die Z-Axe ist. Die in der XY-Ebene liegenden Halbaxen sind dann alle einander gleich. Daraus geht hervor, dass auch alle Trägheitsradien, resp. Trägheitsmomente einander gleich werden, deren Axen mit den beiden gleichen Hauptträgheitsaxen in einer Ebene liegen. Von den beiden von einander verschiedenen Hauptträgheitsradien $\varkappa_x$ und $\varkappa_z$ besitzt einer den grössten, der andere den kleinsten Werth unter allen Trägheitsradien für Axen durch den Punkt O. Aus diesen beiden Hauptträgheitsradien kann man nun in diesem besonderen Falle alle anderen Trägheitsradien berechnen.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass zur Bestimmung der Trägheitsmomente für alle Axen durch einen Punkt O vor allen Dingen die Aufsuchung der drei Hauptträgheitsaxen erforderlich ist. Dies läuft aber auf die stets lösbare geometrische Aufgabe hinaus, von einem gegebenen Ellipsoid die Lage der drei Hauptaxen zu bestimmen. Man kann nun zuweilen das Resultat dieser Bestimmung voraussagen. So lässt sich in vielen Fällen aus der Gestalt und Massenvertheilung des Körpers erkennen, dass für eine bestimmte Gerade das Trägheitsmoment ein Maximum oder Minimum ist, wie z. B. bei homogenen Rotationskörpern für die Rotationsaxe, dann ist diese Gerade eine Hauptträgheitsaxe für irgend einen Punkt, durch welchen sie hindurchgeht.

Man kann ferner oft voraussagen, dass die Trägheitsmomente für mehr als zwei in einer Ebene liegende Axen eines Punktes O gleich sind, dann gilt das für alle Axen in derselben Ebene durch den Punkt O. (Dies erkennt man sofort bei Zuratheziehung des Trägheitsellipsoids. Den drei gleichen Trägheitsmomenten für drei Axen in einer Ebene entsprechen drei gleich grosse Halbaxen des Ellipsoids in einer Ebene Da die dieser Ebene entsprechende Schnittcurve des Ellipsoids eine Ellipse ist, so würde also diese Ellipse

drei gleich grosse Halbaxen besitzen; das ist nur möglich, wenn dieselbe in einen Kreis übergegangen ist, d. h. wenn alle Halbaxen in der betreffenden Ebene gleich gross sind.) Kann man nun gleichzeitig voraussagen, dass das Trägheitsmoment, welches der Senkrechten zu der Ebene im Punkte O angehört, ein Maximum oder Minimum ist, so ist das entsprechende Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid.

Bei den Extremitäten und Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers hat sich nun herausgestellt, dass die Trägheitsmomente für vier in einer zur Längsaxe senkrecht stehenden Ebene gelegenen Axen durch den Schwerpunkt mit grosser Annäherung gleich sind, die Gestalt eines jeden Gliedes lässt ferner auf den ersten Blick erkennen, dass die Masse um die Längsaxe am dichtesten herumgelagert ist, und dass in Folge dessen mit grosser Annäherung das Trägheitsmoment in Bezug auf die Längsaxe eines Gliedes den kleinsten Werth besitzt — wir sind also hier in der Lage, vorauszusagen, dass das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt, d. h. also das Centralträgheitsellipsoid eines jeden Gliedes ein Rotationsellipsoid ist. Aus diesem Grunde sind die beiden Bestimmungen des Trägheitsmomentes in Bezug auf eine zur Längsaxe senkrechte Axe und des Trägheitsmomentes in Bezug auf die Längsaxe selbst ausreichend für die weitere Bestimmung der Trägheitsmomente in Bezug auf alle Axen durch den Schwerpunkt. Bezeichnet $\varkappa_0'$ den Trägheitsradius für eine Axe senkrecht zur Längsaxe und $\varkappa_0''$ den für die Längsaxe selbst, so folgt für den Trägheitsradius $\varkappa_0$ für eine Axe durch den Schwerpunkt, welche mit der Längsaxe den Winkel γ bildet, nach der Relation auf S. 67

$$\varkappa_0 = \sqrt{\varkappa_0'^2 \sin^2\gamma + \varkappa_0''^2 \cos^2\gamma}\,.$$

So werthvoll die Einführung des Trägheitsellipsoids für die Trägheitsmomente und ihre mechanische Verwendung ist, so anschaulich es die Vertheilung der Trägheitsmomente für alle Axen durch einen beliebigen Punkt eines Körpers macht, so liegt doch, wenn man die absolute Grösse eines jeden Trägheitsmomentes daraus ersehen will, eine gewisse Schwierigkeit für die Anschauung in dem Umstande, dass die Halbaxen des Ellipsoids nur ein Maass abgeben für den

reciproken Werth der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment oder, mit anderen Worten, für den reciproken Werth des Trägheitsradius selbst. Man hat sich in Folge dessen die Grössenverhältnisse geradezu umzukehren. Der grösseren Halbaxe des Ellipsoids entspricht das kleinere Trägheitsmoment, der kleinsten der drei Hauptaxen entspricht das Maximum, der grössten der drei Hauptaxen das Minimum des Trägheitsmomentes resp. Trägheitsradius u. s. w.

Eine mehr directe Anschauung der Grösse eines einzelnen Trägheitsmomentes bekommt man, wenn man auf jeder Axe durch O die Länge des Trägheitsradius selbst aufträgt. Die Endpunkte aller dieser Strecken bilden dann wieder eine Fläche, welche nur den einen Nachtheil besitzt, dass sie keine der allbekannten Flächen der zweiten Ordnung ist. Die Gleichung dieser Fläche ist nach S. 66 gegeben durch die Relation:

$$r^2 = r_x^2 \cos^2\alpha + r_y^2 \cos^2\beta + r_z^2 \cos^2\gamma .$$

Multiplicirt man beiderseits mit r^2 und beachtet, dass für die laufenden Coordinaten x, y, z dieser Fläche

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und $$r^2 \cos^2\alpha = x^2 , \quad r^2 \cos^2\beta = y^2 , \quad r^2 \cos^2\gamma = z^2,$$

ist, so lautet die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = r_x^2 x^2 + r_y^2 y^2 + r_z^2 z^2 ,$$

wobei r_x, r_y und r_z die constanten Hauptträgheitsradien bedeuten. Da hier x, y, z bis zur vierten Potenz auftreten, so ist die Fläche von der vierten Ordnung. Dieselbe hängt aber, wie beiläufig angeführt sein möge, sehr eng mit einem Ellipsoid zusammen, nämlich mit dem, welches man erhält, wenn man die drei Hauptträgheitsradien selbst (nicht ihre reciproken Werthe) als Hauptaxen benutzt. (Es ist dieses Ellipsoid also keineswegs identisch mit dem Trägheitsellipsoid.) Denkt man sich in jedem Punkte dieses Ellipsoids die Tangentenebene construirt und auf dieselbe vom Mittelpunkte des Ellipsoids aus das Loth gefällt, so werden die Fusspunkte dieser Lothe im Allgemeinen ausserhalb des Ellipsoids liegen. Diese Fusspunkte bilden in ihrer Gesammtheit eine Fläche, welche das Ellipsoid umhüllt und die Fusspunktfläche desselben genannt wird. Diese Fusspunktfläche besitzt nun gerade die obige Gleichung und ist daher identisch mit der Fläche, welche durch die Endpunkte der auf den Axen abgetragenen Trägheitsradien gebildet

wird. Sind insbesondere die beiden Haupträgheitsaxen x_x und x_y einander gleich, so geht, ebenso wie das Trägheitsellipsoid, auch das Ellipsoid, dessen Hauptaxen die Haupträgheitsaxen sind, in ein Rotationsellipsoid über, und die Fusspunktfläche desselben wird dann ebenfalls eine Rotationsfläche. Wie das Rotationsellipsoid durch Rotation der Ellipse mit den beiden Haupträgheitsaxen x_x und x_z als Hauptaxen entstanden ist, so entsteht die zugehörige Fusspunktfläche durch Rotation der zu der Ellipse gehörenden Fusspunktcurve, d. h. der Curve, welche die Fusspunkte aller vom Mittelpunkte der Ellipse auf die Tangenten derselben gefällten Perpendikel verbindet. Die Gleichung dieser Curve ist in Polarcoordinaten

$$x^2 = x_x^2 \sin^2\gamma + x_z^2 \cos^2\gamma .$$

Da dieser Fall für die Axen durch den Schwerpunkt bei allen Gliedern des menschlichen Körpers eintritt, so gewinnt man schon einen vollständigen Einblick in die Grössenverhältnisse der Trägheitsmomente für alle Axen durch den Schwerpunkt eines Gliedes, wenn man sich diese Fusspunktcurve für jeden Fall construirt.

Für den Trägheitsradius x_0' in Bezug auf eine Axe senkrecht zur Längsaxe und den Trägheitsradius x_0'' in Bezug auf die Längsaxe, welche in diesem Falle die beiden Haupträgheitsradien sind, hat man aus der Tabelle auf S. 50 im Mittel von den Werthen beider Körperseiten folgende Werthe (in Centimetern):

für	x_0'	x_0''
Oberschenkel	11,22	4,56
Unterschenkel . . .	9,41	3,09
Oberarm	7,87	2,77
Unterarm + Hand . .	10,84	2,73

Die Formeln zur Berechnung des Trägheitsradius x_0 für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt, welche mit der Längsaxe des Gliedes den spitzen Winkel γ bilden möge, lauten daher für

Oberschenkel . . $x_0 = \sqrt{11{,}22^2 \cdot \sin^2\gamma + 4{,}56^2 \cdot \cos^2\gamma}$

Unterschenkel . . $x_0 = \sqrt{9{,}41^2 \cdot \sin^2\gamma + 3{,}09^2 \cdot \cos^2\gamma}$

Oberarm . . . . $x_0 = \sqrt{7{,}87^2 \cdot \sin^2\gamma + 2{,}77^2 \cdot \cos^2\gamma}$

Unterarm + Hand . $x_0 = \sqrt{10{,}84^2 \cdot \sin^2\gamma + 2{,}73^2 \cdot \cos^2\gamma}$.

Es sind nun für alle Winkel von 5° zu 5° die Werthe der Trägheitsradien z_0 berechnet und in folgender Tabelle niedergelegt worden.

Die Werthe der Trägheitsradien z_0 für Axen durch den Schwerpunkt, welche mit der Längsaxe des Gliedes den Winkel γ bilden (von 5° zu 5°).

(In Centimetern.)

Winkel γ der Axe mit der Längsaxe des Gliedes	Oberschenkel	Unterschenkel	Oberarm	Unterarm + Hand
0°	4,56	3,09	2,77	2,73
5°	4,65	3,19	2,84	2,88
10°	4,89	3,45	3,05	3,28
15°	5,28	3,85	3,36	3,85
20°	5,75	4,34	3,74	4,51
25°	6,29	4,86	4,17	5,21
30°	6,86	5,41	4,61	5,91
35°	7,44	5,96	5,05	6,61
40°	8,01	6,50	5,49	7,28
45°	8,56	7,00	5,90	7,90
50°	9,08	7,48	6,29	8,49
55°	9,56	7,91	6,64	9,02
60°	9,98	8,29	6,95	9,49
65°	10,35	8,63	7,23	9,89
70°	10,66	8,91	7,46	10,23
75°	10,90	9,12	7,64	10,49
80°	11,08	9,28	7,77	10,69
85°	11,18	9,38	7,84	10,80
90°	11,22	9,41	7,87	10,84

Diese Werthe gelten für alle Axen, welche mit der Längsaxe den betreffenden spitzen Winkel γ bilden, gleichgültig in welcher Ebene durch die Längsaxe sie liegen.

Um ein deutliches Bild von den Grössenverhältnissen dieser Trägheitsradien zu ermöglichen, sind in den Tafeln I bis IV die betreffenden Längen in wahrer Grösse auf der Richtung der zugehörigen Axen aufgetragen worden. Durch die Curve, welche die Endpunkte der Strecken verbindet, kann man gleichzeitig die Grössen für die da-

zwischen liegenden Axen erkennen. Tafel I gibt die Verhältnisse beim Oberschenkel, Tafel II, III und IV die beim Unterschenkel, Oberarm und dem System »Unterarm + Hand«. Denkt man sich jede dieser Figuren um die Längsaxe des Gliedes herumgedreht, so erhält man einen Ueberblick über die Grössen der Trägheitsradien für alle Axen des Raumes durch den Schwerpunkt S eines jeden Gliedes.

Unter allen Trägheitsmomenten für die Axen durch den Schwerpunkt hat also bei allen Gliedern das für die Längsaxe den kleinsten Werth. Da jede Axe durch den Schwerpunkt eines Körpers unter allen Axen derselben Richtung das kleinste Trägheitsmoment aufweist, so ist das Trägheitsmoment für die Längsaxe eines Gliedes des menschlichen Körpers überhaupt das kleinste, welches das Glied haben kann. Im Gegensatz dazu besitzen die Axen durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe unter allen Schwerpunktsaxen das grösste Trägheitsmoment.

Für Fuss, Kopf und Rumpf sind leider die experimentell bestimmten Daten nicht ausreichend, um das Trägheitsmoment für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt mit Sicherheit ableiten zu können. So lange diese fehlenden Daten nicht beigebracht sind, kann man sich vielleicht in diesen Fällen mit einigen Annahmen behelfen, deren Gültigkeit innerhalb gewisser Grenzen wahrscheinlich ist.

Legen wir im Fuss ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Weise fest, dass die X-Axe sowohl senkrecht auf der Längsaxe des Fusses als auch auf der Längsaxe des Unterschenkels bei mittlerer Haltung des Fusses steht, dass ferner die Y-Axe auch senkrecht zur Längsaxe des Fusses gerichtet ist, aber in die durch die Längsaxen von Fuss und Unterschenkel bestimmte Ebene fällt, und dass endlich die Z-Axe mit der Längsaxe des Fusses, d. h. mit der Verbindungslinie vom Mittelpunkt des Talo-cruralgelenks mit der Fussspitze, zusammenfällt, und bezeichnen z_x, z_y, z_z die zu den drei Coordinatenaxen gehörenden Trägheitsradien, so ist aus der Tabelle auf S. 50 nur direct der Werth von z_x bekannt. Als Mittel aus den beiden Werthen für die rechte und linke Seite ergibt sich $z_x = 5{,}94$ cm. Der andere für den Fuss experimentell bestimmte Trägheitsradius entspricht nicht der Y-Axe selbst, sondern einer Axe, welche mit derselben einen Winkel von

ca. 30° bildet. Da der direct bestimmte zweite Trägheitsradius im Mittel eine Grösse von 6,23 cm besitzt, und da andererseits aus der Gestalt des Fusses mit Sicherheit hervorgeht, dass der Trägheitsradius für unsere Y-Axe noch grösser ist, so folgt aus dem Vergleiche mit dem Werth von $\varkappa_x$, dass für den Fuss die beiden Trägheitsradien für die Axen senkrecht zur Längsaxe nicht gleich gross sind, dass also in diesem Falle das Trägheitsellipsoid voraussichtlich kein Rotationsellipsoid ist. Berechnet man nun, dass z. B. beim Unterschenkel (vgl. die Tabelle auf S. 71) der Trägheitsradius für die Axe senkrecht der Längsaxe 9,41 cm und für eine um 30° dazu geneigte Axe 8,29 cm beträgt, so wird man ungefähr annehmen können, dass der Trägheitsradius für die Y-Axe im Fuss nahezu die Grösse von 7 cm besitzt. Hätte man beispielsweise auch für den Oberschenkel nur den Trägheitsradius von 9,98 cm für die Axe bestimmt, welche um 30° gegen die Senkrechte zur Längsaxe geneigt ist, so würde man durch dasselbe Verfahren auf den abgerundeten Werth von 11 cm für die Senkrechte zur Längsaxe beim Oberschenkel gekommen sein, was sich von der wirklichen Grösse 11,22 cm nicht sehr entfernt. Es ist nun sehr wahrscheinlich, dass dieser Werth von 7 cm für den Trägheitsradius des Fusses das Maximum ist; andererseits wird man sich auch wohl nicht sehr von der Wahrheit entfernen, wenn man in dem Trägheitsradius $\varkappa_z$ für die Z-Axe, d. h. also für die Längsaxe des Fusses das Minimum sieht. Demnach würden die drei Trägheitsradien $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ die drei Hauptträgheitsradien für den Fuss repräsentiren. Schätzt man den Trägheitsradius $\varkappa_z$, für dessen Grösse man noch weniger Anhalt besitzt als für die von $\varkappa_y$, nach Analogie der Verhältnisse beim Unterschenkel etwa auf ein Drittel des durchschnittlichen Werthes der anderen beiden Trägheitsradien, also abgerundet auf 2 cm, so würde sich zur Bestimmung des Trägheitsradius $\varkappa$ für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt des Fusses, welche mit den drei Hauptträgheitsaxen die Winkel α, β, γ bildet, die allerdings nur approximativ gültige Relation ergeben:

$$\varkappa^2 = 36\cos^2\alpha + 49\cos^2\beta + 4\cos^2\gamma,$$

wobei der Werth von $\varkappa_z$ auf 6 cm abgerundet ist. Wenn diese Relation auch nicht genau die thatsächlichen Verhältnisse wiedergeben wird, so kann sie doch wenigstens, so lange keine genaueren

Bestimmungen vorliegen, ein ungefähres Bild der Vertheilung der Trägheitsmomente des Fusses geben.

Für den Kopf haben wir noch weniger Daten durch directe Messung gewonnen. Wir kennen nur den Trägheitsradius für die bei gerader Haltung des Kopfes horizontal und gleichzeitig frontal verlaufende Axe durch den Schwerpunkt. Man wird indess keinen zu grossen Fehler begehen, wenn man vorläufig den Kopf in Bezug auf die Trägheitsmomente als homogene Kugel behandelt und in Folge dessen alle Trägheitsradien für die Axen des Schwerpunktes gleich gross annimmt.

Anders verhält es sich mit dem Rumpf. Auch bei diesem haben wir nur das Trägheitsmoment für eine Axe bestimmt, nämlich für diejenige durch den Schwerpunkt, welche parallel der Hüftaxe gerichtet ist. Es reicht diese Bestimmung aus, wenn es sich um die Drehung des Rumpfes um die Hüftaxe selbst handelt, sie genügt aber nicht, sobald z. B. die relative Bewegung des Rumpfes zum Kopf in Betracht kommt. Da der Rumpf derjenige Körpertheil ist, welcher am meisten unter den von uns isolirt untersuchten Abschnitten des Körpers Deformationen und Veränderungen der Lagerung der Massentheilchen im Innern unterworfen ist, so würde sich ein allgemeines Gesetz über das Grössenverhältniss der verschiedenen Trägheitsmomente des Rumpfes auch nur innerhalb gewisser Grenzen aufstellen lassen. So lange keine Untersuchung der Veränderung der Trägheitsmomente bei den Gestaltsveränderungen des Rumpfes vorliegt, wird man die den Resultaten gesteckten Genauigkeitsgrenzen wahrscheinlich nicht überschreiten, wenn man annimmt, dass beim Rumpf in Folge seiner Gestalt dasselbe Gesetz gilt, wie bei den grösseren Extremitätenabschnitten, dass nämlich mit gewisser Annäherung die Trägheitsmomente für alle durch den Schwerpunkt hindurchgehenden Axen, welche senkrecht auf der Längsaxe des Rumpfes stehen, gleich sind. Das Trägheitsmoment für die Längsaxe selbst wird wieder kleiner sein als alle übrigen und man wird daher wieder als Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt ein Rotationsellipsoid besitzen, dessen Rotationsaxe mit der Längsaxe des Rumpfes zusammenfällt. Bedenkt man nun, dass beim Rumpf der Unterschied zwischen der mittleren Dicke und der Länge nicht so gross ist, wie bei den Extremitätenabschnitten, so muss man annehmen, dass auch der Unter-

schied zwischen dem Trägheitsradius für die Längsaxe und dem für eine zur Längsaxe senkrechte Axe durch den Schwerpunkt kleiner ist. Es wird der erstere vielleicht ungefähr halb so gross wie der letztere sein, während bei den Extremitätenabschnitten der Werth dieses Verhältnisses im Durchschnitt $\frac{1}{5}$ war.

Der Trägheitsradius z_0' für die Axe senkrecht zur Längsaxe beträgt nach der Tabelle auf S. 50 $z_0' = 16{,}73$ cm, daher wird der Trägheitsradius für die Längsaxe abgerundet den Werth $z_0'' = 8{,}5$ cm besitzen. Für jeden anderen Trägheitsradius z_0 in Bezug auf eine Axe durch den Schwerpunkt würde dann annähernd die Relation folgen:

$$z_0^2 = 280 \sin^2\gamma + 72 \cos^2\gamma ,$$

wobei γ den Winkel zwischen der Axe und der Längsaxe des Rumpfes bedeutet.

Wenn wir uns auch bewusst sind, dass die über Fuss, Kopf und Rumpf gemachten Annahmen zunächst nur ganz annähernde Gültigkeit beanspruchen können und noch sehr der Bestätigung durch weitere Versuchsreihen bedürfen, so gewähren doch die aus diesen Annahmen abgeleiteten Resultate zusammen mit den für die Extremitäten auf rein empirischem Wege gewonnenen und daher bis zu gewissem Grade sicheren Resultaten einen orientirenden Ueberblick über die Grössenvertheilung der Trägheitsmomente in allen grösseren Abschnitten des menschlichen Körpers. In dieser Hinsicht dürften wohl auch die Resultate für Fuss, Kopf und Rumpf, so lange nichts Sichereres an ihre Stelle gesetzt ist, einen gewissen Werth beanspruchen können.

Ableitung der Trägheitsmomente für jede beliebige Axe des Raumes.

Nachdem die Trägheitsmomente für alle Axen durch den Schwerpunkt eines jeden Körpertheils bestimmt worden sind, lassen sich dieselben auch für alle Axen des Raumes, welche nicht durch den Schwerpunkt hindurchgehen, angeben. Man hat zu diesem Zwecke nur den auf S. 16 und ff. abgeleiteten Satz anzuwenden, dass das Trägheitsmoment T für irgend eine Axe des Raumes, welche vom Schwerpunkte des Körpers die Entfernung e besitzt, durch das Trägheitsmoment T_0 für die zu ihr parallele Axe ausgedrückt wird vermöge der Relation

$$T = T_0 + Me^2 ,$$

unter M die Gesammtmasse des Körpers verstanden. Bezeichnet z den Trägheitsradius für T, während z_0 den Trägheitsradius für T_0 ausdrücken soll, so besteht zwischen diesen beiden Trägheitsradien und der Entfernung e der Axe vom Schwerpunkt die Relation:

$$z^2 = z_0^2 + e^2 .$$

Es ist also das Trägheitsmoment und der Trägheitsradius für irgend eine Axe ausserhalb des Schwerpunktes immer grösser als für die dazu parallele Axe durch den Schwerpunkt.

Bei der Bewegung der einzelnen Glieder des menschlichen Körpers zu einander kommen nun hauptsächlich die Trägheitsmomente in Betracht, welche sich auf Gelenkaxen beziehen. Da der Schwerpunkt in der Längsaxe eines jeden Gliedes liegt, so erfährt das Trägheitsmoment für die Längsaxe keine Aenderung, wenn man vom Schwerpunkte zu dem Mittelpunkt eines der das Glied begrenzenden Gelenke übergeht. Dagegen werden alle anderen Trägheitsmomente grösser. Es sind nun wieder alle Trägheitsmomente gleich, welche zu solchen Gelenkaxen gehören, die senkrecht auf der Längsaxe des Gliedes stehen. Denn alle diese Axen besitzen denselben Abstand vom Schwerpunkt, nämlich die Strecke vom Schwerpunkt bis zum Gelenkmittelpunkt. Bezeichnet man den Trägheitsradius für eine Gelenkaxe, welche senkrecht zur Längsaxe steht, mit

$\varkappa'$, den für die Längsaxe mit $\varkappa''$, während $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$ wie früher die Trägheitsradien für zwei zu diesen parallele Axen durch den Schwerpunkt bedeuten sollen, so ist

$$\varkappa'^2 = \varkappa_0'^2 + e^2 \qquad \text{und} \qquad \varkappa''^2 = \varkappa_0''^2$$

(die Axen für $\varkappa''$ und $\varkappa_0''$ sind ein und dieselbe, nämlich die Längsaxe des Gliedes).

Da der Satz über die Gewinnung des Trägheitsradius für irgend eine durch einen Punkt gehende Axe aus den Werthen der drei oder zwei Hauptträgheitsradien dieses Punktes für jeden beliebigen Punkt, nicht blos für den Schwerpunkt des Körpers gilt, so erhält man den Trägheitsradius $\varkappa$ für irgend eine Axe, welche mit der Längsaxe des Gliedes den Winkel γ bildet, auf dieselbe Weise wie früher durch die beiden Hauptträgheitsradien. Nach dem oben Gesagten sind aber $\varkappa'$ und $\varkappa''$ diese Hauptträgheitsradien für den Gelenkmittelpunkt, wie ihrerseits $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$ die Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt darstellten. Es ist daher

$$\varkappa^2 = \varkappa'^2 \cdot \sin^2\gamma + \varkappa''^2 \cdot \cos^2\gamma,$$

oder bei Benutzung der Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes

$$\varkappa^2 = (\varkappa_0'^2 + e^2)\sin^2\gamma + \varkappa_0''^2 \cos^2\gamma .$$

Da $\varkappa_0'^2 \sin^2\gamma + \varkappa_0''^2 \cos^2\gamma = \varkappa_0^2$, wo $\varkappa_0$ den $\varkappa$ entsprechenden Trägheitsradius für die parallele Axe durch den Schwerpunkt bedeutet, so kann man der Relation auch die Form geben

$$\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + e^2 \sin^2\gamma ,$$

eine Form, welche sich besonders dann mit Vortheil verwenden lässt, wenn man vorher die Trägheitsradien für alle Axen durch den Schwerpunkt berechnet hat.

Um ein Beispiel für die Aenderung der Trägheitsmomente beim Uebergang zu einem Gelenkmittelpunkt zu geben, haben wir die Trägheitsradien des Oberarms für den Mittelpunkt des Humeruskopfes berechnet. Da dieser Gelenkmittelpunkt vom Schwerpunkte des Oberarms nach der Tabelle auf S. 50 im Mittel die Entfernung 11,84 besitzt, so hat man demnach zur Berechnung der Trägheitsradien $\varkappa$ für den Humeruskopfmittelpunkt die Formel

$$\varkappa = \sqrt{(7{,}87^2 + 11{,}84^2)\sin^2\gamma + 2{,}77^2 \cos^2\gamma},$$

oder auch unter Benutzung der vorher berechneten Werthe für die Trägheitsradien x_0 des Schwerpunktes (vgl. die Tabelle auf S. 71)

$$x = \sqrt{x_0^2 + 11{,}84^2 \cdot \sin^2\gamma}.$$

Die daraus sich ergebenden Werthe für x sind in folgender Tabelle niedergelegt worden.

Die Trägheitsradien x des Oberarms für Axen durch den Mittelpunkt des Humeruskopfes, welche mit der Längsaxe den Winkel γ bilden (von 5° zu 5°).

(In Centimetern.)

γ	x	γ	x	γ	x
0°	2,77	35°	8,45	65°	12,94
5°	3,02	40°	9,38	70°	13,39
10°	3,68	45°	10,24	75°	13,75
15°	4,55	50°	11,04	80°	14,01
20°	5,51	55°	11,75	85°	14,17
25°	6,51	60°	12,39	90°	14,22
30°	7,50				

Die Längen dieser Trägheitsradien sind auf Tafel V wieder in natürlicher Grösse auf den Richtungen der Axen aufgetragen worden. Gleichzeitig sind zum Vergleich mit den Trägheitsradien des Schwerpunktes auch die letzteren durch die punktirte Curve mit angegeben worden. Aus der Vergleichung dieser beiden Curven geht deutlich hervor, dass die Trägheitsmomente für die Axen senkrecht zur Längsaxe des Gliedes beim Uebergang zum Gelenkmittelpunkt beträchtlich an Grösse zugenommen haben, während das Trägheitsmoment für die Längsaxe, wie schon früher erwähnt worden ist, seinen Werth beibehalten hat. Daraus ergibt sich aber ein bedeutender Grössenunterschied zwischen dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Längsaxe und den Trägheitsmomenten in Bezug auf Gelenkaxen senkrecht zur Längsaxe des Oberarms. Ein ähnliches Verhältniss wird sich auch für alle anderen Körpertheile herausstellen. Dieser Unterschied macht es erklärlich, warum die Muskeln, welche die Rotation eines Gliedes um seine Längsaxe bewirken, im Vergeich zu den Beuge- und Streckmuskeln eine verhältnissmässig so geringe Masse haben und, sowohl aus diesem Grunde als auch zum Theil in Folge ihres schrägen Ansatzes, ein so geringes

Rotationsmoment für die Längsaxe als Rotationsaxe besitzen. Denn bei dem geringeren Trägheitsmomente setzt jedes Glied der Drehung um die Längsaxe einen bedeutend geringeren Widerstand entgegen als der Bewegung um eine Axe senkrecht zur Längsaxe.

Für den Fuss hatten wir drei verschiedene Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes erhalten. Daher wird man im Allgemeinen auch drei verschiedene Hauptträgheitsradien für jeden anderen Punkt des Gliedes bekommen. Insbesondere hat man für die drei Hauptträgheitsradien x', x'', x''' des Mittelpunktes vom ersten Fussgelenk

$$x'^2 = x_0'^2 + e^2, \quad x''^2 = x_0''^2 + e^2 \quad \text{und} \quad x'''^2 = x_0'''^2,$$

wenn x_0', x_0'' und x_0''' die drei Hauptträgheitsradien (letzterer für die Längsaxe) des Schwerpunktes und e die Entfernung des Fussschwerpunktes von der Mitte des ersten Fussgelenks bedeuten. Demnach hat man für jeden Trägheitsradius x in Bezug auf eine Axe durch den Gelenkmittelpunkt, welche mit den drei Hauptträgheitsradien desselben die Winkel α, β, γ bildet, die Relation:

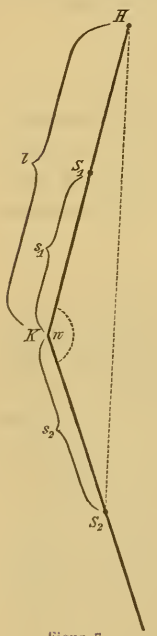
$$x^2 = (x_0'^2 + e^2)\cos^2\alpha + (x_0''^2 + e^2)\cos^2\beta + x_0'''^2\cos^2\gamma.$$

Sehr oft kommt es auch vor, dass man die Trägheitsmomente eines Gliedes für Axen braucht, welche einem nicht mit dem Gliede in directem Zusammenhange stehenden Gelenke angehören. Für die Schwingungen des Systems »Unterschenkel + Fuss« im Kniegelenk braucht man beispielsweise das Trägheitsmoment des Fusses bei irgend einer Stellung desselben zum Unterschenkel in Bezug auf die Knieaxe. In solchen Fällen hat man entweder zu untersuchen, wie weit in Folge der gegenseitigen Stellung der Glieder zu einander der Schwerpunkt jedes einzelnen Gliedes von der Drehungsaxe entfernt liegt, oder man kann, wie es beispielsweise zu einem anderen Zwecke auf S. 52 für die untere Extremität gethan worden ist, zunächst das Trägheitsmoment des ganzen Körpersystems für die Axe durch den Gesammtschwerpunkt aufsuchen, welche der in Betracht kommenden Gelenkaxe parallel läuft, und dann den jeweiligen Abstand des Gesammtschwerpunktes von der Gelenkaxe bestimmen.

Der erste Weg ist der einfachere.

Zum Schlusse soll noch ein Beispiel für die Anwendung der gefundenen Resultate herausgegriffen werden.

Anknüpfend an die letzte Bemerkung wählen wir dazu: die Bestimmung der Schwingungsdauer des ganzen Beins bei verschiedenem Beugegrade im Kniegelenk.



Figur 7.

In beifolgender Figur 7 bedeutet (wie in Fig. 3)

H den Mittelpunkt des Hüftgelenks,
K den des Kniegelenks,
S_1 den Schwerpunkt des Oberschenkels,
S_2 den vom System »Unterschenkel + Fuss«,
s_1 die Länge der Strecke $\overline{KS_1}$,
s_2 die der Strecke $\overline{KS_2}$,
z_1 den Trägheitsradius des Oberschenkels,
z_2 den vom System »Unterschenkel + Fuss«,
beide bezogen auf je eine zur Knieaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt S_1 resp. S_2,
m_1 die Masse des Oberschenkels,
m_2 die des Systems »Unterschenkel + Fuss«,
l die Länge des Oberschenkels und
ω den Beugungswinkel im Kniegelenk.

Der Schwerpunkt S_1 besitzt dann vom Hüftgelenkmittelpunkt H die Entfernung $l - s_1$, der Schwerpunkt S_2 dagegen von H die Entfernung

$$\sqrt{l^2 + s_2^2 - 2ls_2 \cos\omega}.$$

Infolgedessen ist, unter Voraussetzung einer festen Knieaxe, welche genau senkrecht zu der Ebene der drei Punkte S_1, K, S_2 steht, für die zur Knieaxe parallele Axe durch den Hüftgelenkmittelpunkt H

das Trägheitsmoment des Oberschenkels:

$$m_1 [z_1^2 + (l - s_1)^2],$$

und das Trägheitsmoment vom System »Unterschenkel + Fuss«:

$$m_2 [z_2^2 + (l^2 + s_2^2 - 2ls_2 \cos\omega)],$$

folglich das Trägheitsmoment des ganzen Beines in Bezug auf diese frontale Axe des Hüftgelenks:

$$m_1 [\varkappa_1^2 + (l - s_1)^2] + m_2 [\varkappa_2^2 + (l^2 + s_2^2 - 2 l s_2 \cos\omega)]$$

oder

$$m_1 \varkappa_1^2 + m_2 \varkappa_2^2 + m_1 (l - s_1)^2 + m_2 (l^2 + s_2^2 - 2 l s_2 \cos\omega),$$

wobei $m_1 \varkappa_1^2$ und $m_2 \varkappa_2^2$ die schon bestimmten Trägheitsmomente vom Oberschenkel einerseits und »Unterschenkel + Fuss« andererseits für zur Hüftaxe parallele Schwerpunktsaxen sind.

Die Schwingungsdauer τ des um die frontale Axe des Hüftgelenks schwingenden Beines ist in Folge dessen für kleine Amplituden nach den bekannten Pendelgesetzen (vgl. S. 34)

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m_1 \varkappa_1^2 + m_2 \varkappa_2^2 + m_1 (l - s_1)^2 + m_2 (l^2 + s_2^2 - 2 l s_2 \cos\omega)}{g [m_1 (l - s_1) + m_2 \sqrt{l^2 + s_2^2 - 2 l s_2 \cos\omega}]}}.$$

Benutzt man die auf S. 50 angegebenen Werthe für die linke untere Extremität, so hat man in diese Formel einzusetzen für

$m_1 = 4810$, $\varkappa_1 = 11{,}43$, $s_1 = 20{,}75$, $l = 36{,}65$,
$m_2 = 2800$, $\varkappa_2 = 15{,}10$, $s_2 = 21{,}94$, $g = 981{,}11$ (für Leipzig).

In der folgenden Tabelle sind die auf diese Weise berechneten Werthe der Schwingungsdauer τ des ganzen Beins von 5° zu 5° von der Streckstellung ($\omega = 180°$) bis zur rechtwinkligen Beugestellung ($\omega = 90°$) niedergelegt worden.

Schwingungsdauern des ganzen linken Beins bei verschiedener Beugestellung im Kniegelenk (für kleine Amplituden).

Beugungswinkel ω	Schwingungsdauer τ (in Secunden)	ω	τ	ω	τ
180° (Streckstellung)	0,711	150°	0,701	115°	0,664
		145°	0,697	110°	0,657
175°	0,711	140°	0,693	105°	0,6495
170°	0,710	135°	0,688	100°	0,641
165°	0,709	130°	0,683	95°	0,633
160°	0,7065	125°	0,677	90° (rechtw. Beugestellung)	0,624
155°	0,704	120°	0,671		

Wie vorauszusagen war, wird die Schwingungsdauer um so kleiner, je kleiner der Beugungswinkel des Kniegelenks ist. Diese

Abnahme der Schwingungsdauer bei abnehmendem Beugungswinkel geht aber sehr langsam vor sich; im Ganzen beträgt sie für den Uebergang aus der äussersten Streckstellung in die rechtwinklige Beugestellung nicht ganz $\frac{1}{10}$ Secunde. Diese Werthe gelten allerdings nur für kleine Amplituden; handelt es sich um grössere Schwingungamplituden, wie beispielsweise beim Gang, so müssen die Schwingungsdauern noch einer Correction unterworfen werden. Bedeutet α den Elongationswinkel des Pendels, d. h. den Winkel, welchen die Ebene durch die Schwingungsaxe und den Schwerpunkt in ihrer grössten Ausweichung mit der Verticalebene durch die Schwingungsaxe bildet, so drückt sich der genaue Werth τ' der Schwingungsdauer durch den angegebenen und nur für kleine Amplituden geltenden Werth τ aus vermöge der Relation:

$$\tau' = \tau\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right]$$

Von der Genauigkeit, mit welcher der Werth von τ hat bestimmt werden können, hängt es ab, bis zu welchem Gliede in der Klammer man bei der Rechnung zu gehen hat.

Rückblick.

Die Einleitung giebt eine eingehende Definition des Trägheitsmomentes und erläutert seine wichtige Bedeutung für eine Dynamik des menschlichen Körpers. Die Kenntniss der Masse und Schwerpunktslage eines Körpertheils genügt nicht, um auch dessen Verhalten gegenüber Kräften voraussagen zu können, welche ihn um eine Axe herumzudrehen streben. Erst durch die, der Bestimmung von Masse und Schwerpunktslage sich anschliessende Bestimmung der Trägheitsmomente für jede beliebige Axe des Raumes wird der Körper ein bekanntes Object der Bewegung; denn zwei Körper, welche in diesen drei Bestimmungsstücken übereinstimmen, sind im Sinne der Dynamik äquivalent, mögen sie auch noch so grosse Unterschiede in Gestalt und Zusammensetzung aufweisen. Es ergiebt sich daraus, dass die Ermittelung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Theile ebenso nothwendig ist, wie z. B. die Bestimmung der Wirkungsweise der einzelnen Muskeln.

Für die Abschnitte des menschlichen Körpers lassen sich die Trägheitsmomente nicht durch Rechnung allein finden, sondern sie müssen auf epirischem Wege abgeleitet werden. Die von uns angewendete Methode bestand zunächst darin, dass wir die Schwingungsdauer für den um eine Gelenkaxe pendelnden Körpertheil bestimmten und gleichzeitig die Masse desselben und die Entfernung seines Schwerpunktes von der Schwingungsaxe ermittelten. Diese drei Bestimmungsstücke genügen für die Bestimmung des Trägheitsmomentes für eine der Schwingungsaxe parallele Gerade durch den Schwerpunkt. Da die directe Messung der Schwerpunktsentfernung von aussen nicht genau genug für die Bestimmung der Trägheitsmomente ist, so haben wir für eine zweite Versuchsreihe die Methode dahin abgeändert, dass wir die Schwingungsdauern in Bezug auf zwei parallele Axen bestimmten, deren Ebene den Schwerpunkt des Körpers enthielt. Diese beiden Schwingungsdauern in Verbindung mit der Entfernung der beiden Axen und der Masse des Körpertheils genügen ebenfalls zur Ermittelung des Trägheitsmomentes

in Bezug auf die parallele Axe durch den Schwerpunkt, sie ermöglichen aber gleichzeitig eine sehr genaue Bestimmung der Entfernung des Schwerpunktes von den parallelen Schwingungsaxen.

Wir haben die Trägheitsmomente von allen grösseren Abschnitten des menschlichen Körpers im Allgemeinen für zwei Axen durch den Schwerpunkt ermitttelt, und zwar für je eine Axe senkrecht zur Längsaxe des Gliedes und für die Längsaxe selbst. Es genügte die Bestimmung für nur eine Axe senkrecht der Längsaxe, da sich herausgestellt hatte, dass im Allgemeinen die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsaxen senkrecht der Längsaxe mit grosser Annäherung einander gleich sind.

Es ergaben sich nun folgende Resultate:

»Bei allen Gliedern des menschlichen Körpers ist das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf irgend eine zur Längsaxe senkrechten Axe durch den Schwerpunkt und zwischen der Länge des Gliedes dasselbe, und zwar besitzt es nahezu den constanten Werth 0,30.«

»Beim Oberschenkel, Unterschenkel, Oberarm (und voraussichtlich auch beim Unterarm) ist das Verhältniss zwischen dem Trägheitsradius in Bezug auf die Längsaxe und zwischen der mittleren Dicke des Gliedes dasselbe und besitzt annähernd den constanten Werth 0,35.«

Durch diese beiden Sätze ist man in den Stand gesetzt, auch am Lebenden die Grösse des Trägheitsmomentes zu bestimmen: Bezeichnet μ das annähernd constante Verhältniss der Masse eines Körpertheils zur Gesammtmasse M, l die Länge und d die mittlere Dicke dieses Körpertheils, so hat das Trägheitsmoment T_0' desselben in Bezug auf irgend eine Schwerpunktsaxe senkrecht zur Längsaxe des Körpertheils den Werth

$$T_0' = 0{,}30^2 \mu M l^2$$

und das Trägheitsmoment T_0'' in Bezug auf die Längsaxe selbst den Werth

$$T_0'' = 0{,}35^2 \mu M d^2,$$

wobei die Gesammtmasse M des menschlichen Körpers und die Grössen l und d sich am Lebenden direct messen lassen.

Aus diesen zwei Trägheitsmomenten kann man (mit Ausnahme des Fusses) jedes andere Trägheitsmoment für eine beliebige Axe berechnen. Bildet diese Axe mit der Längsaxe den Winkel γ, so besitzt das zugehörige Trägheitsmoment T_0 den Werth

$$T_0 = T_0' \sin^2\gamma + T_0'' \cos^2\gamma .$$

Zur Bestimmung aller Trägheitsmomente für die Schwerpunktsaxen des Fusses sind drei Trägheitsmomente erforderlich, von denen das eine T_0' sich auf die Axe bezieht, welche bei mittlerer Haltung des Fusses senkrecht auf der Ebene der Längsaxen von Fuss und Unterschenkel steht, das zweite T_0'' auf die Axe, welche in dieser Ebene selbst liegt und dabei senkrecht auf der Längsaxe des Fusses steht, und das dritte T_0''' zu der Längsaxe des Fusses selbst gehört. Bedeuten α, β, γ die Winkel, welche eine andere Axe durch den Schwerpunkt bezüglich mit den Axen dieser drei Trägheitsmomente bildet, so ist das Trägheitsmoment T_0 für diese Axe:

$$T_0 = T_0' \cos^2\alpha + T_0'' \cos^2\beta + T_0''' \cos^2\gamma .$$

Es sind für Oberschenkel, Unterschenkel, Oberarm und das System »Unterarm + Hand« die Trägheitsmomente für alle um 5^0 von einander abstehenden Axen des Schwerpunktes berechnet und die Längen der zugehörigen Trägheitsradien in den Figuren auf Tafel I bis IV eingetragen worden. Daraus ist zu ersehen, dass das Trägheitsmoment für die Längsaxe eines der Glieder unter allen Trägheitsmomenten in Bezug auf Schwerpunktsaxen den kleinsten Werth besitzt.

Aus den Trägheitsmomenten für die Axen des Schwerpunktes lassen sich die für alle anderen Axen des Raumes ableiten. Ist e die Entfernung einer Axe A vom Schwerpunkte und T_0 das Trägheitsmoment des Körpers für die dazu parallele Schwerpunktsaxe, so ist das Trägheitsmoment T für die Axe A

$$T = T_0 + me^2 ,$$

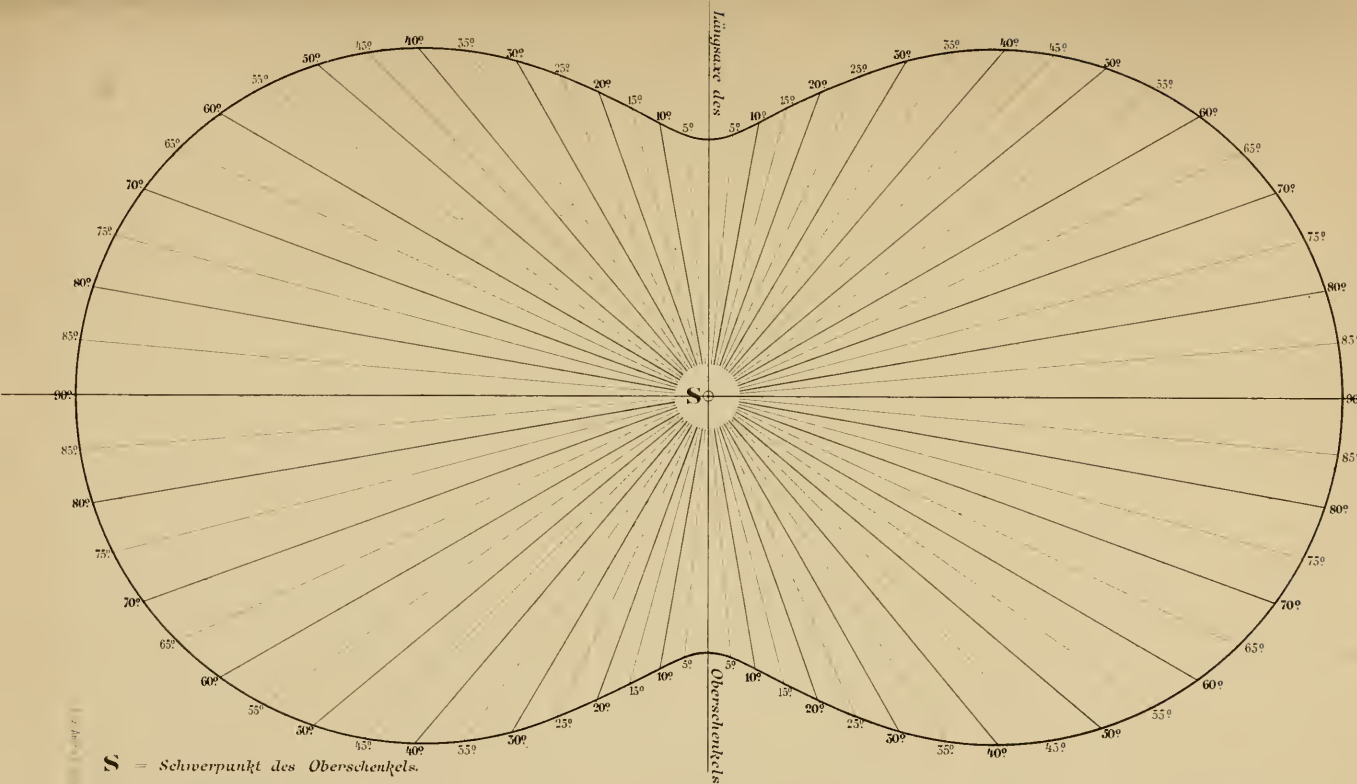
wo m die Masse des Körpertheils bedeutet. Als Beispiel sind die Trägheitsmomente des Oberarms für alle um 5^0 von einander abstehenden Axen des Schultergelenks berechnet und die zugehörigen Trägheitsradien in die Figur auf Tafel V eingezeichnet worden. Das Trägheitsmoment für die Längsaxe des Gliedes behält bei dem Uebergange vom Schwerpunkte zum Gelenkmittelpunkte seinen Werth bei, während alle anderen Trägheitsmomente für dieselbe Axenrichtung

grösser werden. Es ist daher das Trägheitsmoment für die Längsaxe eines Gliedes überhaupt das kleinste, welches das Glied besitzt. Daraus erklärt sich, dass die Beugemuskeln und Streckmuskeln, welche gleichzeitig eine rotirende Wirkung um die Längsaxe eines Gliedes ausüben, eine so geringe Componente für die Rotation und daher ein verhältnissmässig so geringes Rotationsmoment für die Längsaxe besitzen, und dass ferner die Muskeln, welche allein eine Rotation um die Längsaxe hervorbringen, nur verhältnissmässig geringe Masse aufweisen.

Als Beispiel für die Anwendung der gefundenen Trägheitsmomente ist zum Schlusse die Schwingungsdauer des ganzen Beines bei verschiedenem Beugegrade im Kniegelenk berechnet worden.

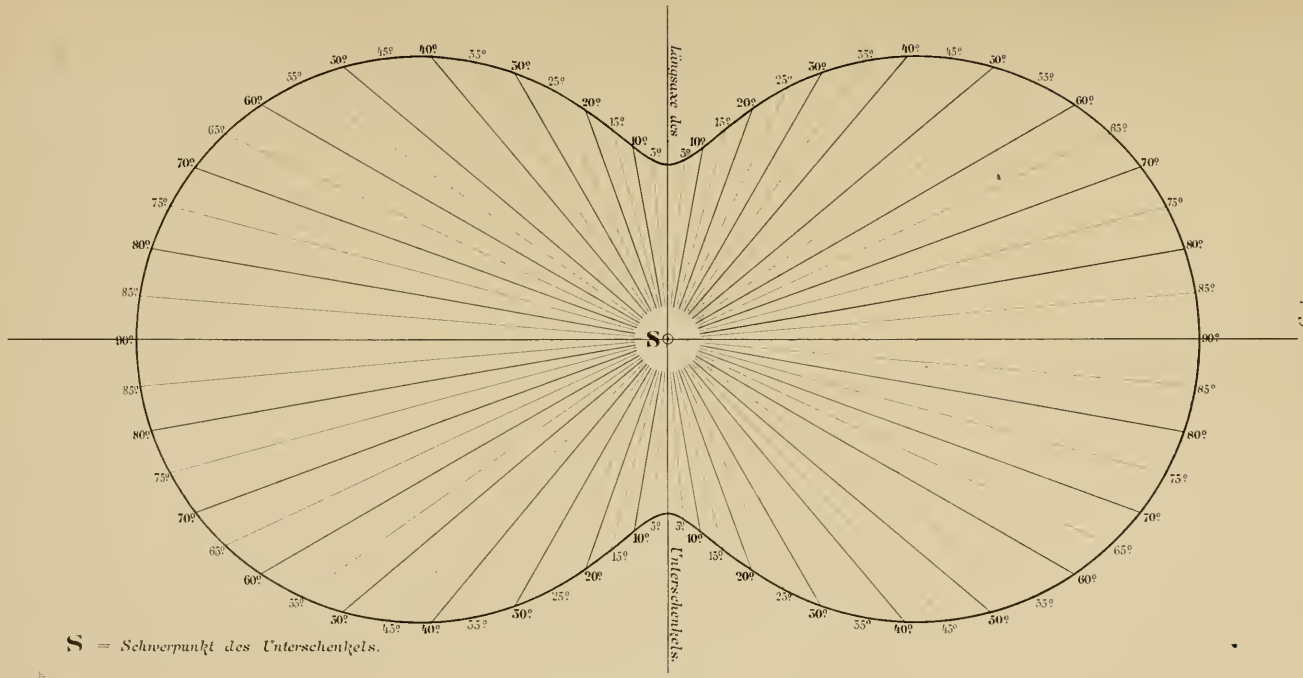
Inhalt.

	Seite
Einleitung	3 (409)
Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente der einzelnen Körpertheile für Axen durch den Schwerpunkt senkrecht zur Längsaxe und für die Längsaxe selbst	15 (421)
Ableitung der Trägheitsmomente für jede beliebige Axe durch den Schwerpunkt	60 (466)
Ableitung der Trägheitsmomente für jede beliebige Axe des Raumes	76 (482)
Beispiel für die Anwendung der gefundenen Trägheitsmomente: Die Bestimmung der Schwingungsdauer des ganzen Beines bei verschiedenem Beugegrade im Kniegelenk	80 (486)
Rückblick	83 (489)

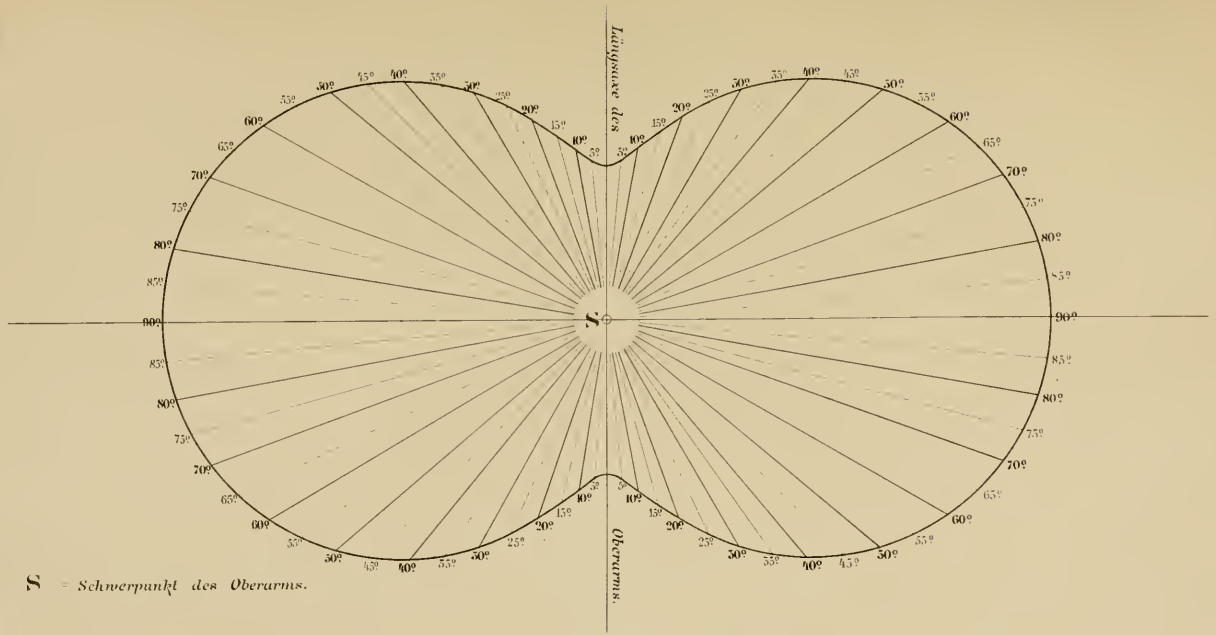


S = *Schwerpunkt des Oberschenkels.*

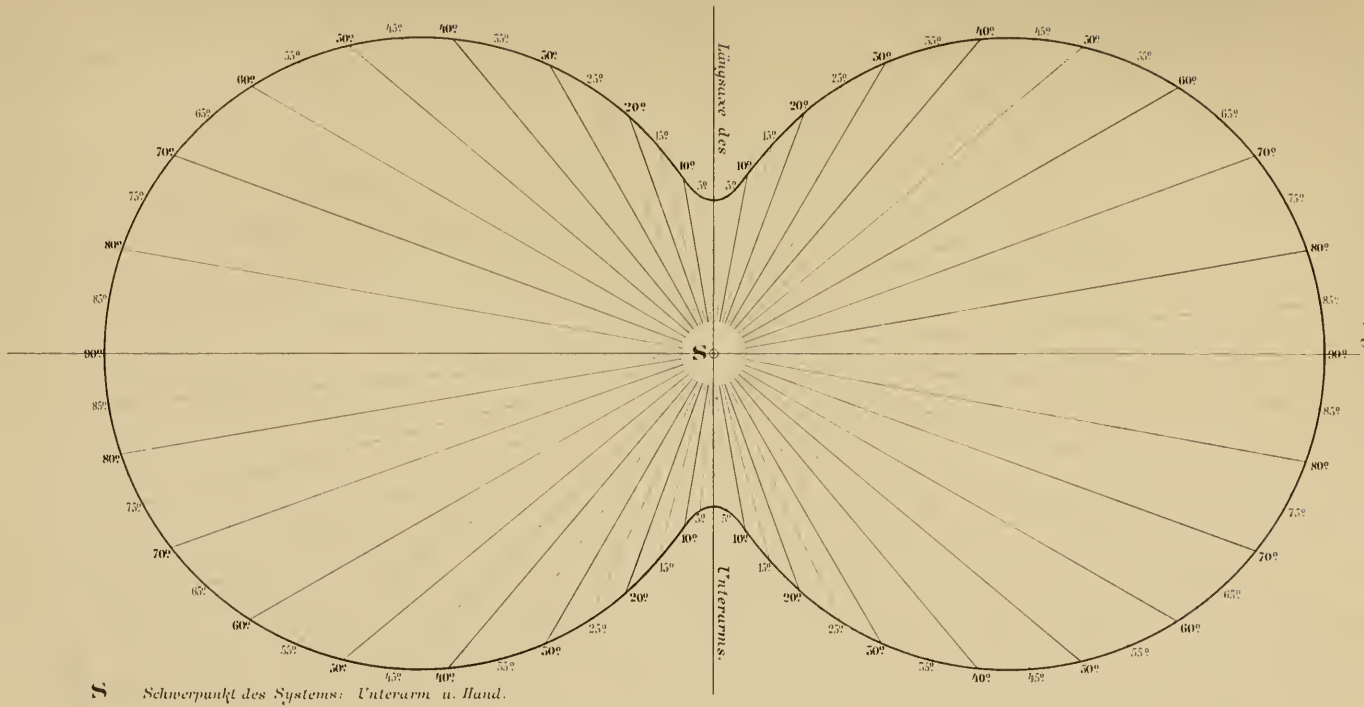
Die Trägheitsradien des Oberschenkels für alle Axen durch den Schwerpunkt, welche in einer durch die Längsaxe gehenden Ebene liegen. (Die Länge jedes Trägheitsradius ist in wahrer Grösse vom Schwerpunkt aus auf jeder einzelnen Axe aufgetragen worden.)



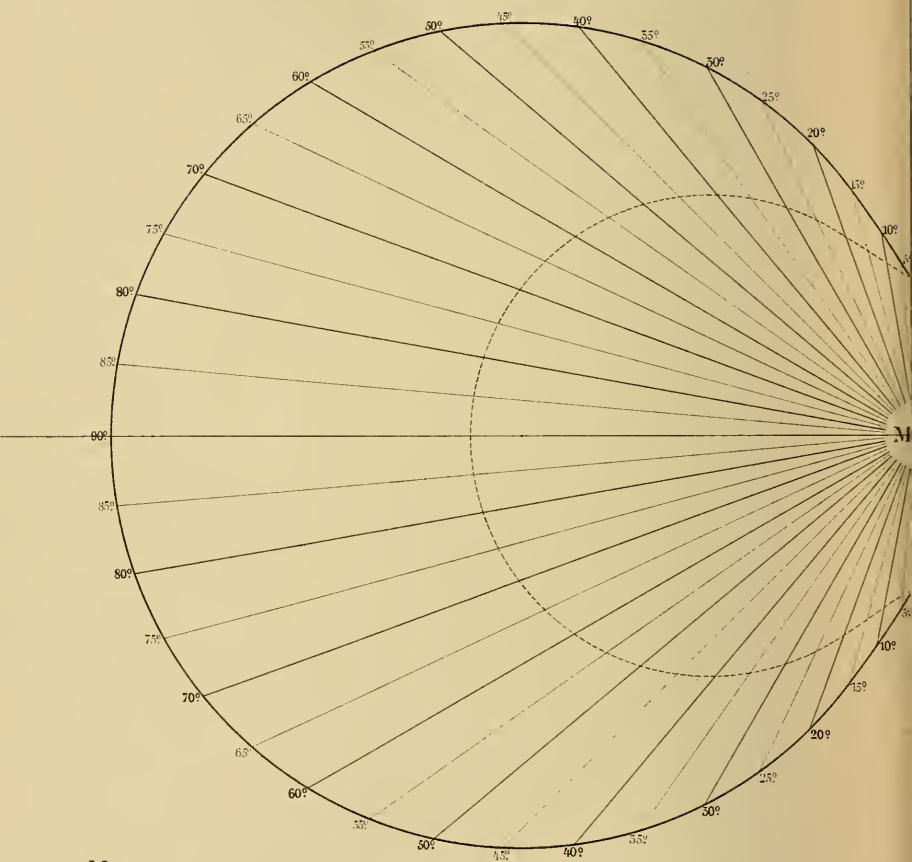
Die Trägheitsradien des Unterschenkels für alle Axen durch den Schwerpunkt, welche in einer durch die Längsaxe gehenden Ebene liegen. (Natürliche Grösse.)



Die Trägheitsradien des Oberarms für alle Axen durch den Schwerpunkt, welche in einer durch die Längsaxe gehenden Ebene liegen. (Natürliche Grösse.)



Die Trägheitsradien für das System: Unterarm und Hand für alle Axen durch den Schwerpunkt des Systems, welche in einer durch die Längsaxe des Unterarms gehenden Ebene liegen. (Natürliche Grösse.)

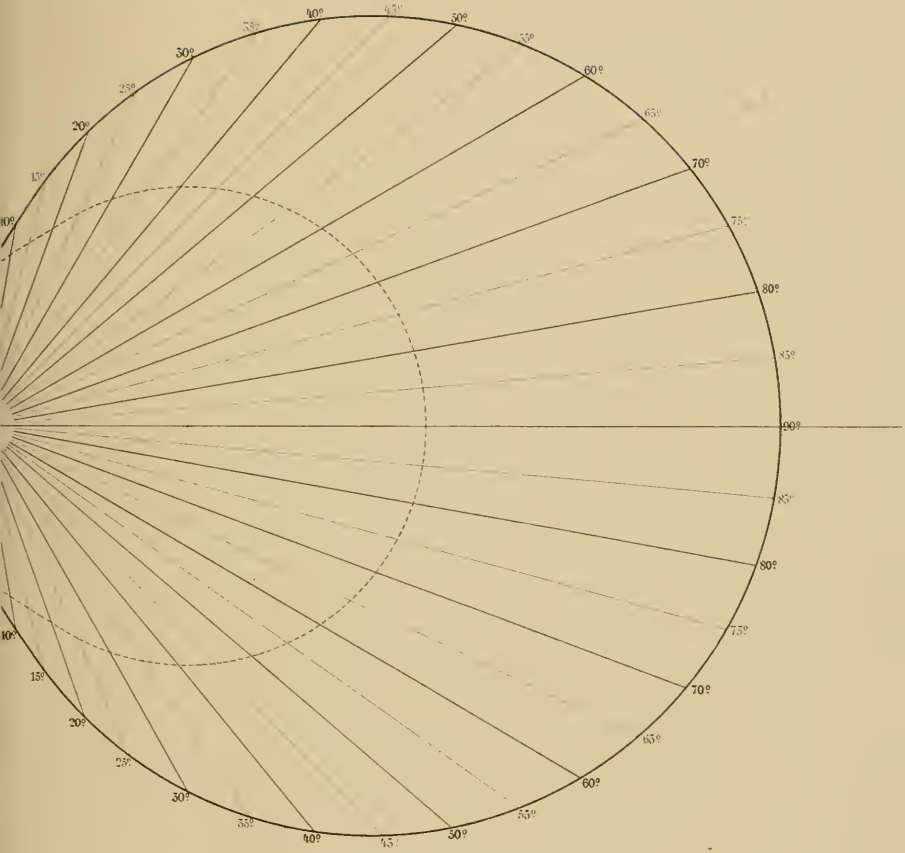


M = *Mittelpunkt des Humeruskopfes.*

Die Trägheitsradien des Oberarms für alle Axen durch den Mittelpunkt des

[Zum Vergleich mit den Trägheitsradien des Oberarms für die Axen durch den

worden.] (Nat



umeruskopfes, welche in einer durch die Längsaxe gehenden Ebene liegen.
awerpunkt sind die Endpunkte dieser durch die punctirte Curve angedeutet
che Grösse.)

ACHTER BAND. XIII. Bd. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M*.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf*.
—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Anwers und Prof. Brnhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf*.
P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf*.
—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M*.

NEUNTER BAND. XIV. Bd. Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M*.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf*.
—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel voraus bestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M*.
—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf*.
P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Vennsvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M*.
G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 *M*.

ZEHNTER BAND. XV. Bd. Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf*.
P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf*.
C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Nennte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M*.
—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M*.
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zunrschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf*.
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M*.
—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Funktion der Länge in der Bahn- und der Knotenlänge. 1874. 1 *M*.
—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M*.

ELFTER BAND. XVIII. Bd. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M*.
C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M*.
P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M*.
W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M*.
C. NEUMANN, Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M*.
W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M*.

ZWÖLFTER BAND. XX. Bd. Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M*.
W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 3 *M*.
—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 *M* 50 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M*.
C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.
C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 *M* 50 *Pf*.
—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 *M*.
—— Elektrische Untersuchungen. Sechszehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cernssits, Enklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 *M*.
—— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 *M* 80 *Pf*.

DREIZEHNTER BAND. XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 1884. 2 *M* 80 *Pf*.
—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 *M*.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 *M*.
F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. n^{ten} Stufe. 1885. 1 *M* 80 *Pf*.
C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(x_1 + \sqrt{1} - x^2\sqrt{1} - x_1^2 \cos\Phi)$ und $Q_n(x_1 + \sqrt{1} - x^2\sqrt{1} - x_1^2 \cos\Phi)$. 1886. 2 *M* 40 *Pf*.
W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 *M*.
H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 *M*.
B. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 *M*.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 *M* 20 *Pf*.

VIERZEHNTER BAND. (XXIV. Bd.) Mit 54 Tafeln u. 1 geolog. Karte. hoch 4. 1888. brosch. Preis 42 *M.*

J. WISLICENUS, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekulen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Figuren. 2. Abdruck. 1889. 4 *M.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. I. Theil: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Theil: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschnitten und 15 Tafeln. 1887. 5 *M.*

J. P. MALL, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Tafeln. 1887. 5 *M.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschnitten. 1887. 1 *M.*

O. DRASCH, Untersuchungen über die papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen. Mit 8 Tafeln. 1887. 4 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achtzehnte Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Beracitkrystalle. Mit 3 Tafeln. 1887. 2 *M.*

W. HIS, Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen. Mit 3 Tafeln und 27 Holzschnitten. 1888. 3 *M.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 *M* 60 *Pf.*

G. HEINRICIUS und H. KRONECKER, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensystem. Mit 5 Tafeln. 1888. 1 *M* 80 *Pf.*

J. WALTHER, Die Korallenriffe der Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Tafeln, 1 Lichtdrucktafel und 34 Zinketypen. 1888. 6 *M.*

W. SPALTEHOLZ, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Tafeln. 1888. 1 *M* 80 *Pf.*

S. LIE, Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1888. 1 *M.*

C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschnitten. 1888. 6 *M.*

FÜNFZEHNTER BAND. (XXVI. Bd.) Mit 42 Tafeln. hoch 4. 1890. brosch. Preis 35 *M.*

B. PETER, Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 4440, sowie einer Sterngruppe bei ε Piscium. Mit 2 Tafeln und 2 Holzschnitten. 1889. 4 *M.*

W. OSTWALD, Über die Affinitätsgrössen organischer Säuren und ihre Beziehungen zur Zusammensetzung und Constitution derselben. 1889. 5 *M.*

W. BRAUNE u. O. FISCHER. Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Mit 5 Tafeln und 6 Holzschnitten. 1889. 3 *M.*

W. HIS, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. Mit 4 Tafeln. 1889. 3 *M.*

W. PFEFFER, Beiträge zur Kenntniss der Oxydationsvorgänge in lebenden Zellen. 1889. 5 *M.*

A. SCHENK, Über Medullosa Cotta und Tubicaulis Cotta. Mit 3 Tafeln. 1889. 2 *M.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Mit 17 Tafeln und 18 Figuren im Text. 1889. 8 *M.*

W. HIS, Die Formentwickelung des menschlichen Vorderhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats. Mit 1 Tafel. 1889. 2 *M* 80 *Pf.*

J. GAULE, Zahl und Vertheilung der markhaltigen Fasern im Froschrückenmark. Mit 10 Tafeln. 1889. 3 *M.*

SECHZEHNTER BAND. (XXVII. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 21 *M.*

P. STARKE, Arbeitsleistung und Wärmeentwickelung bei der verzögerten Muskelzuckung. Mit 9 Tafeln und 3 Holzschnitten. 1890. 6 *M.*

W. PFEFFER, I. Über Aufnahme und Ausgabe ungelöster Körper. — II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen nebst Bemerkungen über den Aggregatzustand des Protoplasmas und über osmotische Vorgänge. Mit Tafel I und II und 1 Holzschnitt. 1890. 7 *M.*

J. WALTHER, Die Denudation in der Wüste und ihre geologische Bedeutung. Untersuchungen über die Bildung der Sedimente in den ägyptischen Wüsten. Mit 8 Tafeln und 99 Zinkätzungen. 1891. 8 *M.*

SIEBZEHNTER BAND. (XXIX. Bd.) Mit 43 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 33 *M.*

W. HIS, Die Entwickelung des menschlichen Rautenhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats. I. Verlängertes Mark. Mit 4 Tafeln und 18 Holzschnitten. 1891. 4 *M.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Die Bewegungen des Kniegelenks, nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen. Mit 19 Tafeln und 6 Figuren. 1891. 5 *M.*

R. HAHN, Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Σ 762, ausgeführt am zwölffüßigen Äquatoreal der Leipziger Sternwarte. Mit 1 Tafel. 1891. 3 *M.*

F. MALL, Das reticulirte Gewebe und seine Beziehungen zu den Bindegewebsfibrillen. Mit 11 Tafeln. 1891. 5 *M.*

L. KREHL, Beiträge zur Kenntniss der Füllung und Entleerung des Herzens. Mit 7 Tafeln. 1891. 5 *M.*

J. HARTMANN, Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Mit 1 lithogr. Tafel u. 3 Textfiguren. 1891. 8 *M.*

ACHTZEHNTER BAND. (XXXI. Bd.)

W. HIS jun., Die Entwickelung des Herznervensystems bei Wirbelthieren. Mit 4 Tafeln. 1891. 5 *M.*

C. NEUMANN, Über einen eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction. Mit 1 Holzschnitt. 1892. 3 *M.*

W. PFEFFER, Studien zur Energetik der Pflanze. 1892. 4 *M.*

W. OSTWALD, Ueber die Farbe der Jonen. Mit 7 Tafeln. 1892. 2 *M.*

O. EICHLER, Anatomische Untersuchungen über die Wege der Blutstromes im menschlichen Ohrlabyrinth. Mit 4 Tafeln und 3 Holzschnitten. 1892. 3 *M.*

H. HELD, Die Beziehungen des Vorderseitenstranges zu Mittel- und Hinterhirn. Mit 3 Tafeln. 1892. 1 *M.* 20 *Pf.*

W. G. HANKEL und H. LINDENBERG, Elektrische Untersuchungen. Neunzehnte Abhandlung: Über die thermo- und piëzoelektrischen Eigenschaften der Krystalle des chlorsauren Natrons, des unterschwefelsauren Kalie, des Seignettesalzes, des Resorcins, des Milchzuckers und des dichromsauren Kalie. Mit 3 Tafeln. 1892. 1 *M.* 80 *Pf.*

W. BRAUNE und O. FISCHER, Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder. Mit 5 Tafeln und 7 Figuren. 1892. 4 *M.*

Leipzig, August 1892. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1) 1881 (1) 1882 (1) 1883 (1) 1884 (2) 1885 (3) 1886 (4 mit Supplement) 1887 (2) 1888 (2) 1889 (4) 1890 (4) 1891 (5). 1892 (2).

—— Philologisch-historischen Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2) 1880 (2) 1881 (2) 1882 (1) 1883 (2) 1884 (4) 1885 (4) 1886 (2) 1887 (5) 1888 (4) 1889 (4) 1890 (3) 1891 (3).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 *M* zu haben.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES

This book is due on the date indicated below, or at the expiration of a definite period after the date of borrowing, as provided by the library rules or by special arrangement with the Librarian in charge.

DATE BORROWED	DATE DUE	DATE BORROWED	DATE DUE
C28 (747) M100			

QP321 B73
1892

Braune

Bestimmung der trägheitsmomente des menschlichen körpers und seiner glieder

12151

ON PERSONAL RESERVE SHELF

QP321 B73
1892